Lemaire

GROUPES D'HOMOTOPIE

DEA NICE 1982-83

(J-M. LEMAIRE)

Groupes d'homotopie

Topologie algébrique : Traduire 1 pb de topo en un pb d'algèbre. Pour traduire, on se sert d'un dictionnaire : un foncteur.

ex : Groupe fondamental π_1 (ou groupe de Poincaré) : X e.t. et $x_0 \in X$.

$\mathcal{C}([0,1], X)$ = ens des chemins

$\Omega(X)_{x_0}$ = ens des lacets d'origine x_0

Si X esp. métrique, la topologie sur $\mathcal{C}([0,1],X)$ est celle de la convergence uniforme.

λ, μ, x_0, x_1, x_2

$$\lambda.\mu(t) = \begin{cases} \lambda(2t) & \text{si } t \leq \frac{1}{2} \\ \mu(2t-1) & \text{si } t \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Notion d'homotopie de chemins : elle permet d'introduire un groupe.

$\omega, \omega' \in \Omega(X)_{x_0}$ homotopes si 1) ~ 2) est vérifié :

1) $\exists H : I \times I \xrightarrow{\text{cont.}} X$ et $H(t,0) = \omega(t)$
$(t,s) \longmapsto H(t,s)$ $\quad H(t,1) = \omega'(t)$
$x_0 = H(0,s) = H(1,s) \quad \forall s$

2) $\exists \tilde{H} : [0,1] \longrightarrow \Omega X_{x_0}$ chemin continu dans l'espace métrique ΩX_{x_0} reliant ω à ω'

$\omega \sim \omega'$ est une relation d'équivalence. La classe d'~ de ω est notée $[\omega]$

$$\Omega X_{x_0}/\sim \;\doteq\; \pi_1(X,x_0) = \{\text{composantes connexes par arcs de } \Omega X_{x_0}\} = \pi_0(\Omega X_{x_0})$$

Théorème : $\pi_1(X,x_0)$ est un groupe.

ω_1, ω_2, ω_3

$f : X, x_0 \longrightarrow Y, y_0$ appl. continue entre 2 espaces top. pointés (ie $f(x_0)=y_0$) induit une application $\pi_1(f) : \pi_1(X,x_0) \longrightarrow \pi_1(Y,y_0)$
$\omega \longmapsto f\circ\omega$

qui est un morphisme de groupes.

$1/2$, $1/4$, $1/4$; ω_1 ω_2 ω_3 ; s ; ω_1 ω_2 ω_3

1-paramétrage de $\omega_1 \circ \omega_2 \circ \omega_3$

2-paramétrage de $\omega_3 \circ \omega_2 \circ \omega_1$

π_1 est un foncteur de la catégorie des e.t dans la catégorie des groupes

(NB : la plupart des foncteurs introduits en topo. algé. sont "continus" ie puisque $\pi_1(X)$ est un groupe discret, localement cst en ce sens : si 2 applications continues sont homotopes, les application $\pi_1(f)$ associées seront égales.)

Intérêt de cette construction ?

$S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$; e^{n+1}

e^{n+1} = boule unité de $\mathbb{R}^{n+1}$
$e^{n+1} \supset S^n$

Théorème de Brouwer :
Il n'est pas possible de rétracter continument la boule sur la sphère

$S^n \overset{\wedge}{=} S^n$ Si r existe (r cont / $r|_{S^n} = id$)

$\int$ $\nearrow r$ e^{n+1} (si le foncteur F existe) $\xrightarrow{F}$ $F(S^n) = \mathbb{Z}$, $F(e^n) = 0$ alors c'est impossible ! car $\mathbb{Z} \xrightarrow{=} \mathbb{Z}$, $\downarrow$ 0 $\nearrow r$ $\neq 1$, $0 \neq 1$

Pour $n=1$, on peut répondre à la question grâce à $\pi_1(S^1)=\mathbb{Z}$ et $\pi_1(\text{point})=0$
Pour $n\geq 2$, on doit introduire le foncteur homologie $H_n(S^n)$.

Tous les pb. de topo. se ramènent à :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ g\downarrow & \nearrow h & \\ A & & \end{array}$$

$\exists h \,/\, h\circ g = f$ divisibilité à droite ($\longrightarrow$ ex : Th. de Brouwer)
(problème d'extension)

ou :

$$\begin{array}{ccc} & & Z \\ & \ell \nearrow & \downarrow k \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

$\exists \ell \,/\, k\circ \ell = f$ divisibilité à gauche
(problème de relèvement)

($\longrightarrow$ ex : dét. du logarithme)

Comment relever l'application cont. f en $\hat{f}$?
C'est le foncteur π_1 qui résoud la question

$$\begin{array}{ccc} & & \mathbb{R} \\ & \hat{f} \nearrow & \downarrow \\ X & \xrightarrow{f} & S^1 \end{array} \qquad \begin{array}{c} t \\ \downarrow \\ e^{i2\pi t} \end{array}$$

~~π_1~~

$$\begin{array}{ccc} & ? \nearrow & 0=\pi_1(\mathbb{R}) \text{ car } \mathbb{R} \text{ contractile} \\ & & \downarrow \\ \pi_1(X,x_0) & \longrightarrow & \pi_1(S^1)=\mathbb{Z} \end{array}$$

Si $\hat{f}$ existe, il est nécessaire que f

<u>Problème des multiplications sur la sphère</u> (résolu par la topo. alg.)
$S^0 = \{\pm 1\}$ et $S^1 \simeq \mathbb{C}$ ont une structure de groupe.
$S^3 \subset \mathbb{H}$ quaternions a une structure de groupe (où $\mathbb{H}$ ~~de base~~ $=\mathbb{R}^4$ de base $1, i, j, k$ où la mult. est linéaire et $i^2=j^2=k^2=$
$ij=k$ et $ji=-k$, et par permutations circulaires ...

$$\underbrace{(a+ib+jc+kd)}_{q}\underbrace{(a-bi-jc-dk)}_{\bar{q}}=a^2+b^2+c^2+d^2$$

$q\bar{q}=|q|^2$

Toutes les propriétés des nbres complexes sont vraies pour $\mathbb{H}$ <u>sauf</u> la commutativité ! Ainsi $|q|=1 \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+d^2$ et on obtient S^3. D'où 1 structure de groupe non commutatif de S^3.)
Il y a une multiplication non associative sur S^7 (Kelley). Puis plus rien !

$1=(1,0,\dots,0)\in S^n$. Trouver $S^n\times S^n \longrightarrow S^n$ tel que $x.1=x=1.x$,
càd l'application $\xrightarrow{m}$ qui étend $\nearrow$: c'est un problème d'extension

$$\begin{array}{ccc} S^n\times S^n & \xrightarrow{m} & S^n \\ i \updownarrow & \nearrow & \\ S^n \vee S^n = S^n\times\{1\}\cup\{1\}\times S^n & & \end{array}$$

$\{1\}\times S^n$

$S^n\times\{1\}$

Pb résolu par Adam : il n'y a pas d'autres sphères S^n qui conviennent !

En utilisant le foncteur homologie, on montre qu'il est nécessaire pour que m existe ($m \neq 0$) que n soit impair. Pour aller plus loin, il faut construire un espace auxilliaire et un autre foncteur. L'espace attaché à S^n ~~est~~ ressemble à un espace projectif (c'est $S^{n+1} \cup e^{2n+2}$) et on constaterait que si la sphère S^n convient, alors $n = 2^{k+1} - 1$ et $k \leq 3$ (Recherches de Hopf 1935, Adem 1950 Adams 1958)

S^1 $\xrightarrow{\omega}$ x_0

Groupes d'homotopie :

Ils généralisent les $\pi_1(X, x_0)$. On peut dire que $\Omega X_{x_0} = \mathcal{C}^\cdot(S^1, 1 ; X, x_0)$

On peut considérer :

$$\pi_0(\Omega X, x_0) = \pi_1(X, x_0)$$

$$\text{def} \longrightarrow \pi_n(X, x_0) = \pi_0 \mathcal{C}^\cdot(S^n, 1 ; X, x_0)$$

Notons $\pi_0 \mathcal{C}^\cdot(X, x_0 ; Y, y_0) = [X_{x_0}, Y_{y_0}]^\cdot$ = ensemble des classes d'homotopie respectant les points de base x_0 et y_0.

Théorème :

π_n est un ensemble si $n = 0$, un groupe si $n = 1$, un groupe abélien si $n \geq 2$.

NB : $\mathcal{C}^\cdot(I^n, \partial I^n ; X, x_0) = \pi_n(X, x_0)$ où $I = [0, 1]$. Ainsi π_2 peut être visualisé avec le carré "singulier" dans X la représentation (b).

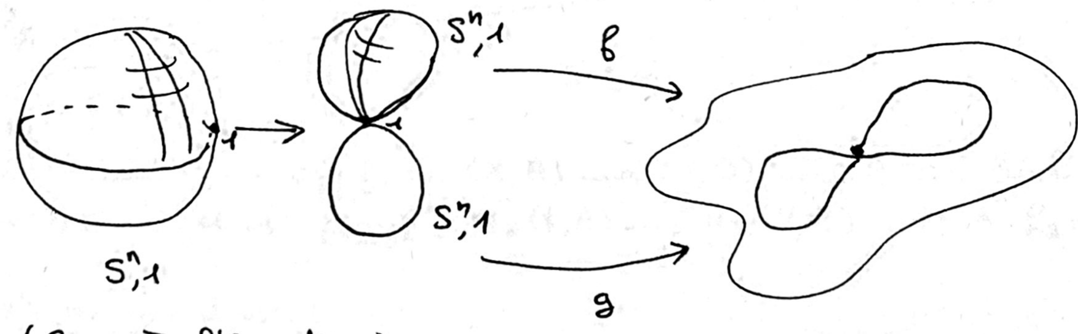
f x_0 g

On compose les éléments de π_1 en juxtaposant les carrés : ...

Définitions : $\pi_n(X, x_0) = [S^n, 1 ; X, x_0]^\cdot$ (a)

$= [I^n, \partial I^n ; X, x_0]^\cdot$ (b)

Dessin dans la représentation (a) : comment composer les éléments ?



(On resserre l'équateur)

(Remarque : $\pi_n(X) = \pi_{n-1}(\Omega X)$ si $n \geq 2$. fournit une dém. du théorème)

On sait peu de chose sur les π_n, si ce n'est quelques cas particuliers : $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$, théorème de Van Kampen (non abordé car on ne parlera pas de π_1). On a $\pi_n(S^1) = 0$ si $n \geq 2$ car $\mathbb{R} \to S^1$ est un revêtement et :

* Si $\tilde{X} \to X$ est un revêtement, on a $\pi_n(\tilde{X}) \xrightarrow{\simeq} \pi_n(X)$ et si $n \geq 2$ $\pi_1(\tilde{X}) \hookrightarrow \pi_1(X)$.
* Si X est contractible, $\forall n \geq 2$ $\pi_n(X) = \pi_n(\text{point}) = 0$.
* Si $n \geq 2$ $\pi_i(S^n) = 0$, $i < n$ (Stone Weierstrass et Th. Sard)
* $\pi_n(S^n) = \mathbb{Z}$ (Théorie du degré = th. de Morse)
* Ayant construit l'homologie $H_n(X)$, on a $h : \pi_n(X) \to H_n(X)$ foncteur, et on a le :

<u>Théorème d'Hurewicz</u> → Si X est n-connexe, ie $\pi_k(n) = 0$ $\forall k \in [0,n]$, alors $\pi_{n+1}(X) \simeq H_{n+1}(X)$

$\pi_1(X) = 0$ $\quad \pi_i(X) = 0$ si $i < n$ alors $\begin{cases} h_n \text{ isomorphisme} \\ h_{n+1} \text{ surjectif} \end{cases}$

d'où $\pi_n(S^n) = \mathbb{Z}$ car $H_n(S^n) = \mathbb{Z}$

* Que dire de $\pi_i(S^n)$ $(i > n)$? Hopf et Hurewicz ont montré que $\pi_3(S^2) = \mathbb{Z}$, et si $i \geq 3$ $\pi_i(S^3) = \pi_i(S^2)$

On montre que $\pi_3(S^2) = \mathbb{Z}$ grâce à la fibration : (c'est une submersion) — Ehresmann local : une submersion propre est une fibration

$$\begin{array}{ccccc} S^1 & \subset & S^3 & \longrightarrow & S^2 \\ \cap & & \cap & & \| \\ \mathbb{C} & & \mathbb{C}^2 & & \mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \end{array}$$

la fibre est S^1 = nbres compl. de $|\,| = 1$

$$(a,b) \longmapsto (aX + bY = 0)$$

et à la suite exacte d'homotopie de fibration :

$$F \to X \to Y$$

$$\cdots \to \pi_{n+1}(Y) \to \pi_n(F) \to \pi_n(X) \to \pi_n(Y) \to \pi_{n-1}(F) \to \cdots \to \pi_0(Y).$$

Ici on aura :

ex : $\underset{0}{\underset{\|}{\pi_2(S^3)}} \to \pi_2(S^2) \xrightarrow{\simeq} \pi_1(S^1) \to \underset{0}{\underset{\|}{\pi_1(S^3)}}$ d'où $\pi_2(S^2) = \mathbb{Z}$ (sans Hurewicz)

ex : $\underset{0}{\underset{\|}{\pi_3(S^1)}} \to \pi_3(S^3) \xrightarrow{\simeq} \pi_3(S^2) \to \underset{0}{\underset{\|}{\pi_2(S^1)}}$ d'où $\pi_3(S^2) = \pi_3(S^3) = \mathbb{Z}$ (admis)

Homologie

(ref : Massey, Algebraic topology : an introduction)

Une paire d'e.t. (X,A) est un couple d'e.t tels que $A \subset X$. Un morphisme de paires $f:(X,A) \to (Y,B)$ est une application continue qui vérifie $f(A) \subset B$. On obtient ainsi une catégorie : la catégorie PairTop. des paires d'e.t.
On décide de construire un foncteur H_* de la catégorie des paires d'e.t. dans celle des R-modules gradués, où R est un anneau.

I Axiomes d'une théorie de l'homologie (Eilenberg - Steenrod)

Un foncteur homologie est un foncteur H_* : PairTop. $\to$ R-mod.gradués tel que pour tout triplet (X,A,B) d'e.t. vérifiant $B \subset A \subset X$ il existe un morphisme de R-modules gradués

$$\partial_* = \{\partial_n\}_{n\in\mathbb{Z}} : H_*(X,A) \longrightarrow H_*(A,B)$$

appelé "opérateur bord", qui vérifie

$$\partial_n : H_n(X,A) \longrightarrow H_{n-1}(A,B)$$

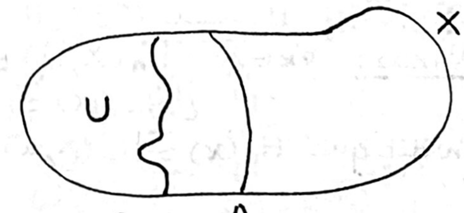
et les 4 axiomes :

(A1) Axiome d'exactitude : Si $(A,B) \hookrightarrow (X,B) \hookrightarrow (X,A)$ sont les injections canoniques, on a la suite exacte de R-modules :

$$\to H_n(A,B) \longrightarrow H_n(X,B) \longrightarrow H_n(X,A) \to$$
$$\to H_{n-1}(A,B) \longrightarrow H_{n-1}(X,B) \longrightarrow H_{n-1}(X,A) \to$$
$$\to \dots$$

(A2) Homotopie : Si $f,g : (X,A) \to (Y,B)$ sont 2 morphismes de paires homotopes(*1), et si $f_*, g_* : H_*(X,A) \to H_*(Y,B)$, on a $f_* = g_*$.

(A3) Axiome d'excision :



Si $i : (X\setminus U, A\setminus U) \hookrightarrow (X,A)$ est l'injection canonique et si $\overline{U} \subset \mathring{A}$ alors :

$i_* : H_*(X\setminus U, A\setminus U) \xrightarrow{\sim} H_*(X,A)$ est un isomorphisme.

(A4) Axiome de la dimension[(*2)] :

$$H_n(\text{point}) = \begin{cases} R & \text{si } n=0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Remarques :

Les axiomes (A1) et (A2) sont vérifiées par l'homotopie, mais non (A3).
(A1), (A2) et (A3) donnent une théorie de l'homologie extraordinaire.
(*1) : f et g sont 2 morphismes de paires homotopes si $\exists F : X \times I \to Y$
$F(x,t) = f_t(x)$, $f_0 = f$ et $f_1 = g$ et $\forall t \in I$ $f_t(A) \subset B$.
(*2) : On note $H_*(X) = H_*(X, \emptyset)$ et $H_*(X;R)$ l'homologie sur X à coefficient dans l'anneau R.

Le théorème suivant justifie le nom donné à l'axiome (A4) puisqu'il permet de distinguer les sphères S^n au seul regard de l'homologie.
On notera que sur les polyhèdres toutes les théories de l'homologie à coefficient dans un anneau fixé R coïncident.

Théorème : Si $n > 0$ $H_i(S^n) = \begin{cases} R & \text{si } i = 0 \text{ ou } n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

et $H_i(S^0) = \begin{cases} R \oplus R & \text{si } i = 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

preuve : $S^0 = \{-1\} \cup \{+1\} = a \cup b$ et l'axiome (A1) appliqué à la paire $(S^0, a) \doteq (S^0, a, \emptyset)$ donne la suite exacte :

$$\begin{array}{ccccccccc} H_1(S^0,a) & \xrightarrow{\partial_1} & H_0(a) & \longrightarrow & H_0(S^0) & \longrightarrow & H_0(S^0,a) & \xrightarrow{\partial_0} & 0 = H_{-1}(a) \\ \wr\!\wr \text{ (ax A3)} & & \| & & & & \wr\!\wr \text{ (ax A3)} & & \text{(ax. A4)} \\ H_1(b) & & R & & & & H_0(b) & & \\ \| & & & & & & \| \text{ (ax A4)} & & \\ 0 & & & & & & R & & \end{array}$$

donc $0 \to R \to H_0(S^0) \to R \to 0 \Rightarrow H_0(S^0) = R \oplus R$ (*)
De même, si $n > 0$,

$$\begin{array}{ccccccc} \dots \longrightarrow & H_n(a) & \longrightarrow & H_n(S^0) & \longrightarrow & H_n(S^0,a) & \longrightarrow \dots \\ & \| & & & & \wr\!\wr \text{ (A3)} & \\ & 0 & & & & H_n(b) = 0 & \end{array}$$

donc $H_n(S^0) = 0$ si $n > 0$.

* Pour S^1 : on utilise le lemme

lemme : $\forall x \in X$ $\begin{cases} H_n(X,x) \simeq H_n(X) & \text{pour } n > 0 \\ H_0(X) \simeq H_0(x) \oplus H_0(X,x) \simeq R \oplus H_0(X,x) \end{cases}$

(On dit que $\tilde{H}_n(X) = H_n(X,x)$ est l'homologie réduite)

((*) car la suite est scindée, cf AL1 et R = R-module libre)

Montrons le lemme :

$H_n(x) \to H_n(X) \xrightarrow{j_*} H_n(X,x) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(x) \to \dots$

montre que si $n \geq 2$, j_* est un isomorphisme

(car $H_n(x) = H_{n-1}(x) = 0$ d'après A4)

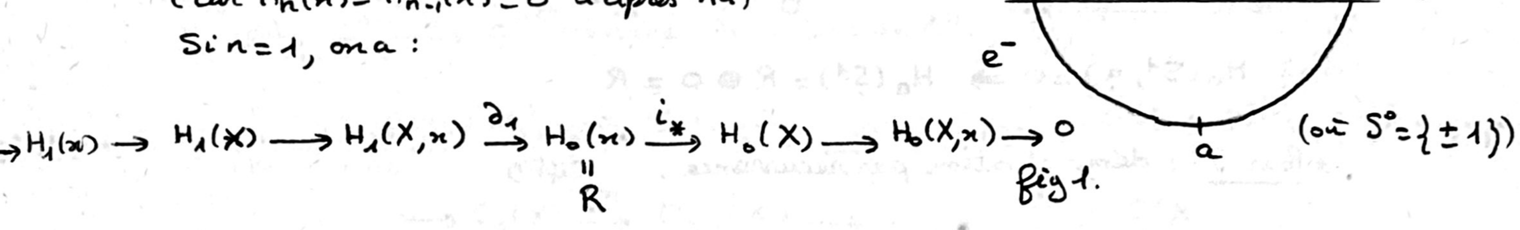
Si $n=1$, on a :

b

e^+ S^1

-1 1 $\updownarrow \varepsilon$

e^-



$\to H_1(x) \to H_1(X) \longrightarrow H_1(X,x) \xrightarrow{\partial_1} H_0(x) \xrightarrow{i_*} H_0(X) \longrightarrow H_0(X,x) \to 0$

$H_0(x) = R$

a (où $S^0 = \{\pm 1\}$)

fig 1.

Mais $i_* : H_0(x) \to H_0(X)$ est injective car $i : \{x\} \hookrightarrow X$ et il existe $r : X \to \{x\}$ (l'appl. constante) telle que $r \circ i = id_{\{x\}} \Rightarrow r_* \circ i_* = id_{H_*(x)}$, de plus r_* est un inverse à gauche de i_*, donc cette suite exacte est scindée en $H_0(X)$, ie $H_0(X) = H_0(x) \oplus H_0(X,x)$.
(cf. Hu, introduction to homological algebra : Corollaires 5.8 et 5.9 p34)

Il suffit donc de connaître l'homologie réduite $H_n(S^1,a)$ pour obtenir $H_n(S^1)$.

Soit $e^+ = S^1 \cap \{y \geq 0\}$, $e^- = S^1 \cap \{y \leq 0\}$.

$i : (S^1,a) \hookrightarrow (S^1,e^-)$ et il existe une déformation-rétraction $r : (S^1,e^-) \to (S^1,a)$ (ie r est une rétraction et $r \circ i$ homotope à l'id), de sorte que l'axiome (A2) donne :

$$H_n(S^1,a) \simeq H_n(S^1,e^-)$$

Soit $U = S^1 \cap \{y < -\varepsilon\}$. L'excision (A3) donne : $H_n(S^1,e^-) \simeq H_n(S^1 \setminus U, e^- \setminus U)$
$\wr$ (déf-rétraction)
$H_n(e^+,S^0)$

Finalement, $H_n(S^1,a) \simeq H_n(e^+,S^0)$, et on peut utiliser la suite exacte de la paire (e^+,S^0) :

* Si $n \geq 2$, on a le diagramme :

$$H_n(S^1 \setminus U, e^- \setminus U)$$

$\uparrow \wr$ (par déformation-rétraction)

$$H_n(S^0) \longrightarrow H_n(e^+) \longrightarrow H_n(e^+,S^0) \xrightarrow[\sim]{\partial} H_{n-1}(S^0)$$

$H_n(S^0) = 0$, $H_{n-1}(S^0) = 0$

$\uparrow \wr$ (par déf-rétraction)

$H_n(b) = 0$

d'où $H_n(S^1 \setminus U, e^- \setminus U) \simeq 0 \Rightarrow H_n(S^1) = 0$ si $n \geq 2$.

Le même diagramme permet de conclure si $n = 0$ ou 1 si on le complète convenablement :

* Si $n=1$,

$$H_1(S^1 \setminus U, e^- \setminus U)$$

$\uparrow \wr$ (déf-rétract)

$$H_1(S^0) \longrightarrow H_1(e^+) \longrightarrow H_1(e^+,S^0) \longrightarrow H_0(S^0) \longrightarrow H_0(e^+) = R$$

$H_1(S^0) = 0$

$\uparrow \wr$ (déf-rétract.)

$H_1(b) = 0$

$H_0(S^0) = R \oplus R$

$(x,y) \longmapsto x+y$

de noyau R

donc $H_1(e^+,S^0) = R \simeq H_1(S^1)$.

* Si $n=0$,

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & H_0(S^1\setminus U, e^-\setminus U) & & \\ & & & & \uparrow & & \\ H_0(S^0) & \longrightarrow & H_0(e^+) & \longrightarrow & H_0(e^+, S^0) & \xrightarrow{\partial} & H_{-1}(S^0) \\ \wr\wr & & \wr\wr & & \| & & \| \\ R\oplus R & \twoheadrightarrow & R & & 0 & & 0 \end{array}$$

d'où $H_0(S^1, a) = 0 \Rightarrow H_0(S^1) = R \oplus 0 = R$

* Pour S^n : démonstration par récurrence. CQFD

II Homologie singulière.

Soit $\mathbb{R}^{n+1}$ muni de la base canonique $(e_0, \dots, e_n)$. Le n-simplexe standard $\Delta^n = \{\sum t_i e_i \,/\, \sum t_i = 1 \text{ et } t_i \geq 0\}$ est l'enveloppe convexe des vecteurs de base.

$\Delta^0 = \{0\} \subset \mathbb{R}$ $\quad \Delta^1 \simeq [0,1]$ $\quad$ Δ^2 = triangle équilatéral

Δ^n est un convexe compact de $\mathbb{R}^n$, donc homéomorphe à une boule de $\mathbb{R}^n$. Numéroter les sommets du simplexe Δ^n revient à orienter l'hyperplan qui le contient. Une face de Δ^n est l'enveloppe convexe d'un sous-ensemble des sommets $\{e_0, \dots, e_n\}$. Plus précisemment si $\gamma : \{0, \dots, p\} \longrightarrow \{0, \dots, n\}$ est injective et croissante, $p \leq n$, elle détermine une application

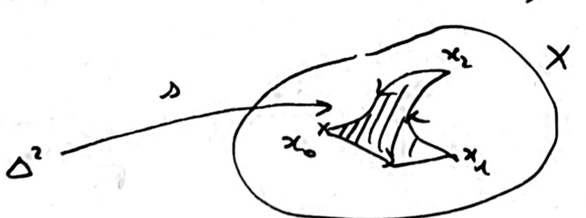
$$\begin{array}{ccc} \Delta^p & \hookrightarrow & \Delta^n \\ \sum t_i e_i & \longmapsto & \sum t_{\gamma(i)} e_{\gamma(i)} \end{array} \qquad \text{donc une } p\text{-face de } \Delta^n.$$

et la i-face de Δ^n est déterminée par $\delta_i : \Delta^{n-1} \hookrightarrow \Delta^n$, δ_i ne contenant pas le sommet e_i.

Un n-simplexe singulier de l'e.t. X est une application continue $s : \Delta^n \to X$. On note $S_n(X)$ cet ensemble. Le R-module libre de base $S_n(X)$ s'appelle l'ensemble des n-chaînes singulières et se note $C_n(X) = R^{(S_n(X))}$.

$$\begin{cases} S_n(X) = \text{ensemble des } n\text{-simplexes singuliers} \\ C_n(X) = R\text{-module libre des } n\text{-chaînes singulières} = R^{(S_n(X))} \end{cases}$$

On pose $S_n(X) = C_n(X) = 0$ si $n < 0$, et on remarque que $C_0(X) = R^{(X)}$.



2-simplexe singulier

$\partial s = [0,1] + [1,2] - [0,2]$

1-simplexe singulier = chemin de X

$\partial s = x_1 - x_0$

<u>Définition</u> : <u>opérateur bord</u>

$$\partial_n : C_n(X) \longrightarrow C_{n-1}(X)$$
$$s \longmapsto \sum_{i=0}^{n} (-1)^i\, s \circ \delta_i = \partial_n s$$

où $\Delta^{n-1} \xrightarrow{\delta_i} \Delta^n$ désigne la i-face de Δ^n.

Cet opérateur vérifie $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$ de sorte que l'on obtienne un complexe de chaînes

$$\cdots \longrightarrow C_n(X) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}(X) \longrightarrow \cdots \quad = \underset{*}{C}(X)$$

On note $C_*(X) = C(X) = \{C_n(X)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ s'il n'y a pas d'ambiguïté. On pose toujours $Z_n(X) = \operatorname{Ker} \partial_n$ et $B_n(X) = \operatorname{Im} \partial_{n+1}$. Le défaut d'exactitude de la suite est mesuré par le quotient :

$$H_n(X) \doteq Z_n(X) / B_n(X) = n\text{-ième module d'homologie sing. de } X.$$

<u>Homologie relative</u> : Il s'agit maintenant de définir l'homologie d'une paire topologique (X,A). Soit $A \subset X$. On a les inclusions évidentes :

$$S_n(A) \hookrightarrow S_n(X) \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} C_n(A) & \overset{i_n}{\hookrightarrow} & C_n(X) \\ \partial \downarrow & & \downarrow \partial \\ C_{n-1}(A) & \overset{i_{n-1}}{\hookrightarrow} & C_{n-1}(X) \end{array}$$

de sorte que $C(A) = \{C_n(A)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ constitue un sous-complexe de chaînes de $C(X)$.

$C_n(X,A) \doteq C_n(X) / C_n(A)$ est un R-module libre qui s'appelle le module des <u>n-chaînes relatives</u> de X modulo A.

L'opérateur ∂ passe au quotient : $\bar{\partial}_n : C_n(X,A) \longrightarrow C_{n-1}(X,A)$ de sorte que l'on puisse poser :

$$H_n(X,A) = \operatorname{Ker}\bar{\partial}_n / \operatorname{Im}\bar{\partial}_{n+1} = \underline{n\text{-ième module d'homologie relative de } X \text{ modulo } A}.$$

On peut poser, comme dans Crumeyrolle,

$$Z_p(X,A) = \{ s \in C_p(X) \;/\; \partial_p s \in C_{p-1}(A) \}$$

et

$$B_p(X,A) = \{ s \in C_p(X) \;/\; \exists \gamma \in C_{p+1}(X) \quad s = \partial_{p+1}\gamma \ \text{mod. } C_p(A) \}$$

et il est facile de voir que $H_n(X,A) \simeq Z_p(X,A) / B_p(X,A)$

$Z_p(X,A)$ est le R-module des p-cycles relatifs, et $B_p(X,A)$ le R-module des p-bords relatifs modulo l'ensemble A.

Notre foncteur homologie sera parfaitement défini si l'on sait associer à chaque application continue $f : X \to Y$ une homomorphisme de R-modules $f_* : H(X) \to H(Y)$ où $H(X) = \{H_n(X)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ et $H(Y) = \{H_n(Y)\}_{n \in \mathbb{Z}}$.

Posons $C_n(X) \xrightarrow{C_n(f)} C_n(Y)$

$s \longmapsto f \circ s$ pour tout n-simplexe s, le tout étant prolongé par linéarité. $C_n(f)$ applique les cycles sur les cycles et les bords sur les bords, donc passe au quotient et détermine un homomorphisme :

$$H_n(f) = f_* : H_n(X) \longrightarrow H_n(Y)$$

De m̂, une application de paires topo. $f : (X,A) \to (Y,B)$ induit un morphisme de R-modules $f_* : H(X,A) \to H(Y,B)$ de façon évidente.

Il nous reste maintenant à vérifier que le foncteur H de la catégorie des paires topologiques dans la catégorie des R-modules gradués vérifie les 4 axiomes d'Eilenberg-Steenrod. L'axiome (A4) de la dimension est évidente. Montrons :

1°/ <u>Axiome d'exactitude (A1)</u>

Démontrons 2 propositions d'algèbre différentielle graduée : $C = \{C_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ désigne un complexe de chaîne, ie un R-module gradué muni d'une différentielle $\partial = \{\partial_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ de degré -1 $(\partial\partial = 0)$

<u>Proposition 1</u> : Pour toute suite exacte de complexes de chaînes (u et v étant des morphismes de chaînes) :

$$0 \to A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C \to 0$$

on a la suite exacte longue d'homologie

$$\cdots \to H_{n+1}(C) \xrightarrow{\partial} H_n(A) \xrightarrow{u_*} H_n(B) \xrightarrow{v_*} H_n(C) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A) \to \cdots$$

(preuve : cf. cah1, page 18)

Proposition 2 : Soit le triple (X,A,B) d'e.t. $X \supset A \supset B$
Alors :

$$C(X,A) \simeq C(X,B)/C(A,B)$$

preuve : on utilise le lemme des 9 et le diagramme :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & C(B) & \to & C(A) & \to & C(A,B) & \to & 0 \\
 & & \| & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & C(B) & \to & C(X) & \to & C(X,B) & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & 0 & \to & C(X,A) & \xrightarrow{\sim} & C(X,B)/C(A,B) & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

} commencer par écrire ces 2 lignes exactes

qui prouve que $C(X,A) \simeq C(X,B)/C(A,B)$ CQFD

Rappel : (lemme des 9) : Si dans le diagramme suivant 5 suites sont exactes, la dernière l'est aussi :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & A & \to & B & \to & C & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & A' & \to & B' & \to & C' & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & A'' & \to & B'' & \to & C'' & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

On déduit l'axiome d'exactitude (A1) : La pro. 2 montre que l'on a la suite exacte de complexes de chaînes :

$$0 \to C(A,B) \to C(X,B) \to C(X,A) \to 0$$

et la pro. 1 affirme l'existence de la suite exacte longue d'homologie :

$$\cdots \xrightarrow{\partial} H_n(A,B) \to H_n(X,B) \to H_n(X,A) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A,B) \to \cdots$$

ce qui prouve (A1) pour l'homologie singulière.

Remarque : On peut déduire l'axiome d'exactitude du lemme du serpent :

lemme du serpent(*) : Considérons le diagramme commutatif à lignes exactes :

$$\begin{array}{ccccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & \to & 0 \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma & & \\ 0 \to A' & \xrightarrow[f']{} & B' & \xrightarrow[g']{} & C' & & \end{array}$$

(ce sont des R-mod.)

Alors :

1) les suites (i) $\operatorname{Ker}\alpha \to \operatorname{Ker}\beta \to \operatorname{Ker}\gamma$

et (ii) $\operatorname{Coker}\alpha \to \operatorname{Coker}\beta \to \operatorname{Coker}\gamma$

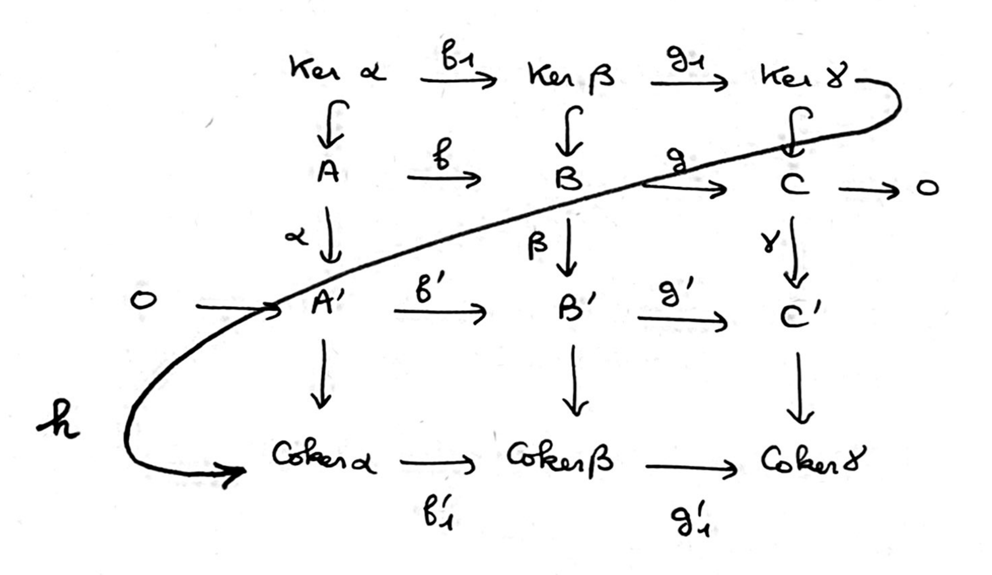
induites par f, g, f' et g' sont exactes

2) Il existe un R-homomorphisme $h : \operatorname{Ker}\gamma \to \operatorname{Coker}\alpha$ qui connecte les 2 suites exactes (i) et (ii) en une seule suite exacte :

$$\operatorname{Ker}\alpha \to \operatorname{Ker}\beta \to \operatorname{Ker}\gamma \xrightarrow{h} \operatorname{Coker}\alpha \to \operatorname{Coker}\beta \to \operatorname{Coker}\gamma$$

(Cette suite s'appelle la suite Ker-Coker)

preuve : On a le diagramme :



a) Les suites (i) et (ii) existent et sont exactes car :

(1) $\operatorname{Ker} g_1 = \operatorname{Im} f_1$

* $\forall x \in \operatorname{Ker} g_1$ $g_1(x) = 0$ et $x \in B$ / $g(x) = g_1(x) = 0 \Rightarrow x \in \operatorname{Ker} g = \operatorname{Im} f$ donc $\exists y \in A$ $x = f(y)$.

(*) du nom de l'auteur

On a $x \in \text{Ker}\,\beta \Leftrightarrow f(y) \in \text{Ker}\,\beta \Leftrightarrow \beta \circ f(y) = 0 \Leftrightarrow f'(\alpha(y)) = 0$
$\Leftrightarrow \alpha(y) = 0$ car f' injective

d'où $y \in \text{Ker}\,\alpha$ et $x = f(y) \in \text{Im}\, f_1$
Ainsi $\text{Ker}\, g_1 \subset \text{Im}\, f_1$

* $\forall x \in \text{Im}\, f_1 \quad x = f_1(y) = f(y)$ où $y \in \text{Ker}\,\alpha$
et $g_1(x) = g \circ f(y) = 0 \Rightarrow \text{Im}\, f_1 \subset \text{Ker}\, g_1$.

(2) <u>$\text{Ker}\, g'_1 = \text{Im}\, f'_1$</u>

* $\forall \dot{x} \in \text{Ker}\, g'_1 \quad g'_1(\dot{x}) = 0 \Leftrightarrow \overline{g'(x)} = 0 \Leftrightarrow g'(x) \in \text{Im}\,\gamma$
$\exists y \in C \quad g'(x) = \gamma(y)$ et g surjective $\Rightarrow \exists z \in B \quad y = g(z)$
donc $g'(x) = \gamma \circ g(z) = g' \circ \beta(z)$
$\Downarrow$
$x - \beta(z) \in \text{Ker}\, g' = \text{Im}\, f'$ donc $\exists t \in A' \quad x - \beta(z) = f'(t)$
En passant au quotient : $\overline{x - \beta(z)} = f'_1(\dot{t})$ où $\dot{t} \in \text{Coker}\,\alpha$
et $\overline{\beta(z)} = 0 \Rightarrow \dot{x} \in \text{Im}\, f'_1$ donc $\text{Ker}\, g'_1 \subset \text{Im}\, f'_1$

* $\forall \dot{x} \in \text{Im}\, f'_1 \quad \exists \dot{y} \in \text{Coker}\,\alpha \quad \dot{x} = f'_1(\dot{y}) \Rightarrow x = f'(y)$
donc $g'_1(\dot{x}) = g'_1 \circ f'_1(\dot{y}) = \overline{g' \circ f'(y)} = \dot{0} = 0$ et $\text{Im}\, f'_1 \subset \text{Ker}\, g'_1$.

b) <u>Existence de h</u> : (connecting morphism)

Si $x \in \text{Ker}\,\gamma \subset C \quad \exists b \in B \quad x = g(b)$. Alors $\beta(b) \in B'$ et $\exists!\, a' \in A'$ tel que $f'(a') = \beta(b)$
On pose $h(x) = \dot{a}' \in \text{Coker}\,\alpha$

(1) h est bien définie car il ne dépend pas du choix de $b \in B \,/\, g(b) = x$.
En effet, si $b' \in B \,/\, g(b') = x$, on a :
$g(b - b') = 0 \Rightarrow \beta(b - b') = f'(a' - a) = 0$ et f' inj
donc $a = a' \Rightarrow \dot{a} = \dot{a}'$ oui

(2) Connexion entre les 2 suites exactes : on montre facilement que (2.1) $\text{Ker}\, h = \text{Im}\, g_1$ et (2.2) $\text{Im}\, h = \text{Ker}\, f'_1$.
Montrons par exemple (2.1) :

(2.1) <u>$\text{Ker}\, h = \text{Im}\, g_1$</u>.

* $\forall x \in \text{Ker}\, h \quad h(x) = 0$, mais par définition $h(x) = \dot{a}$ où $\begin{cases} f'(a) = \beta(b) \\ \text{et} \\ x = g(b) \end{cases}$

Alors $\dot{a} = 0 \Leftrightarrow a \in \text{Im}\,\alpha \Leftrightarrow \exists z \in A \quad \alpha(z) = a$
et $f'(\alpha(z)) = \beta(b) \Leftrightarrow \beta \circ f(z) = \beta(b) \Leftrightarrow f(z) - b \in \text{Ker}\,\beta$

donc $g(\underbrace{b - f(z)}_{\in \text{Ker}\,\beta}) = g(b) = x \Rightarrow x \in \text{Im}\, g_1$. ainsi $\text{Ker}\, h \subset \text{Im}\, g_1$.

* $\forall x \in \mathrm{Im}\, g_1 \quad x = g(y)$ où $y \in \mathrm{Ker}\, \beta$ et $h(x) = \dot{a}$ où $\begin{cases} f'(a) = \beta(b) \\ \text{et} \\ x = g(b) \end{cases}$

On peut prendre $b = y$, de sorte que $f'(a) = \beta(y) = 0$ et $\dot{a} = 0$ (f inj.)
donc $\dot{a} = 0$.
Ainsi $\mathrm{Im}\, g_1 \subset \mathrm{Ker}\, h$.

CQFD

Ce lemme étant établit, comment montrer l'axiome d'exactitude ?
Si $\bar{\partial}_n : C_n(X,A) \to C_{n-1}(X,A)$ est l'homomorphisme bord de l'homologie relative, posons :

$$Z_n(X,A) = \mathrm{Ker}\, \bar{\partial}_n$$
$$Z'_n(X,A) = \mathrm{Coker}\, \bar{\partial}_{n+1} \doteq C_n(X,A) / \mathrm{Im}\, \bar{\partial}_{n+1}$$

On définit naturellement $\bar{\partial}'_n : Z'_n(X,A) \to Z_n(X,A)$ et l'on s'aperçoit que l'on a le diagramme :

$$\begin{array}{ccccccc} & Z'_n(A,B) & \to & Z'_n(X,B) & \to & Z'_n(X,A) & \to 0 \\ & \downarrow \bar{\partial}'''_n & & \downarrow \bar{\partial}''_n & & \downarrow \bar{\partial}'_n & \\ 0 \to & Z_n(A,B) & \to & Z_n(X,B) & \to & Z_n(X,A) & \end{array}$$

(lignes exactes diag. com.)

Il suffit alors d'appliquer le lemme du serpent en remarquant
que $\mathrm{Ker}\, \bar{\partial}'''_n = H_n(A,B) = \mathrm{Coker}\, \bar{\partial}'''_n$
$\mathrm{Ker}\, \bar{\partial}''_n = H_n(X,B) = \mathrm{Coker}\, \bar{\partial}''_n$
$\mathrm{Ker}\, \bar{\partial}'_n = H_n(X,A) = \mathrm{Coker}\, \bar{\partial}'_n$

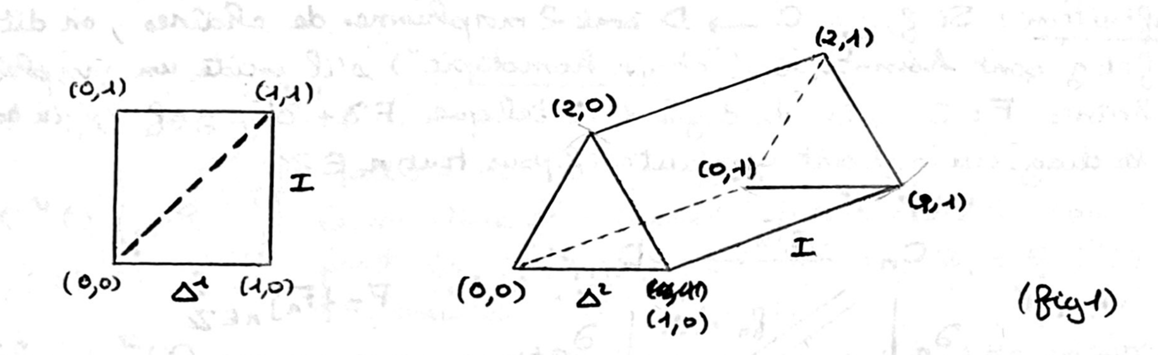
CQFD

2°/ Axiome d'homotopie (A2)

Considérons 2 applications $f, g : X \to Y$ homotopes. Il existe une appl. continue $F : X \times [0,1] \to Y$ telle que $F_0 = f$ et $F_1 = g$ où $F_t = F(\cdot, t)$
Si $f : X \to Y$, on rappelle que l'on peut définir $f : C(X) \to C(Y)$, morphisme de chaînes, tel que pour tout simplexe $s \in S_n(X)$ on ait : $f(s) = f \circ s \in S_n(Y)$.

Problème : Construire une notion d'homotopie dans les complexes de chaînes et les morphismes de chaînes, notion qui soit conservée par le foncteur $X \rightsquigarrow C(X)$.

Si $s : \Delta^n \to X$ est un n-simplexe et $I = [0,1]$, $\Delta^n \times I$ s'appelle un prisme et l'on pose : $s \times id : \Delta^n \times I \longrightarrow X \times I$



(fig 1)

Si F est une homotopie de f à g, on pourra composer :

$$\Delta^n \times I \xrightarrow{s \times id} X \times I \xrightarrow{F} Y$$

On peut toujours découper les prismes $\Delta^n \times I$ de façon à obtenir une chaîne de $(n+1)$-simplexes. Pour cela, on considère :

$$\{0, \dots, n+1\} = \Delta^{n+1} \xrightarrow{r_i} \Delta^n \times I \qquad (0 \leq i \leq n)$$
$$j \longmapsto (j,0) \text{ si } j \leq i$$
$$j \longmapsto (j-1, 1) \text{ si } j > i$$

On obtient $n+1$ simplexes dans le prisme $\Delta^n \times I$. (cf. fig 1 et 2)

(2,1) •••, (0,1) •, (1,1) ••, (2,0) •, (0,0) •••, (1,0) ••, Δ^2, I, 0, 1

(fig 2). [cas du prisme $\Delta^2 \times I$
On obtient 3 ~~tétr~~ tétraèdres ••• comme autant de chemin liant (0,0) à (2,1) et croissants, lorsque l'on considère l'ordre produit sur les 6 sommets :

$$(a,b) < (a',b') \iff a < a' \text{ et } b < b'.$$

Les tétraèdres obtenus sont orientés canoniquement avec cet ordre.]

On définit alors : $F : C(X) \longrightarrow C(Y)$ de degré 1

$$s \text{ simplexe} \longmapsto \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \, F \circ (s \times id) \circ r_i$$

où $\Delta^{n+1} \xrightarrow{r_i} \Delta^n \times I \xrightarrow{s \times id} X \times I \xrightarrow{F} Y$

et l'on constate que ce morphisme de chaînes vérifie

$$\partial F + F\partial = g - f$$

d'où la définition :

<u>Définition</u> : Si $f, g : C \to D$ sont 2 morphismes de chaînes, on dit que f et g sont homotopes ("<u>chain homotopic</u>") s'il existe un morphisme de chaînes $F : C \to D$ de degré $+1$ tel que $F\partial + \partial F = g - f$, ie tel que le diag. suivant soit commutatif pour tout $n \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{array}{ccc} C_n & \xrightarrow{F_n} & D_{n+1} \\ \partial_n \downarrow & \searrow^{f_n}_{g_n} & \downarrow \partial_{n+1} \\ C_{n-1} & \xrightarrow[F_{n-1}]{} & D_n \end{array} \qquad F = \{F_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$$

On note $f \sim g$, et l'on dit que F est une homotopie de f à g.

L'axiome d'homotopie (A2) provient alors des 2 lemmes :

<u>lemme 1</u> : Si $f, g : X \to Y$ sont 2 applications continues homotopes, alors les morphismes de chaînes correspondants $f, g : C(X) \to C(Y)$ sont chain homotopics.

<u>lemme 2</u> : Si $f, g : C \to D$ sont 2 morphismes de chaînes chain homotopics, alors $f_* = g_* : H(C) \to H(D)$.

Le lemme 1 provient de la construction de la définition "est chain homotopic" ci-dessus, tandis que le lemme 2 se montre directement :
Si $f \sim g$, il existe un morphisme de chaînes F de degré $+1$ tel que

$$\partial F + F\partial = g - f$$

Soit $z \in Z_n(C)$. On a $(g-f)z = F \underbrace{\partial z}_{=0} + \partial F z = \partial F z \in B_n(D)$

donc $gz - f(z) \in B_n(D)$ et $f_*(\dot{z}) \doteq \dot{\overline{fz}} = \dot{\overline{gz}} = g_*(\dot{z})$ pour tout $\dot{z} \in H_n(C)$.
CQFD

3°/ Axiome d'excision (A3)

Soient X un espace topologique, $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ un recouvrement quelconque de X tel que $\mathring{\mathcal{U}} \doteq \{\mathring{U}_i\}_{i\in I}$ soit un recouvrement d'ouverts de X.
Un simplexe est dit petit d'ordre $\mathcal{U}$ si il existe $U_i \in \mathcal{U}$ tel que

$$s(\Delta^n) \subset \mathring{U}_i \qquad (\text{où } s : \Delta^n \longrightarrow X.)$$

Notons :

$S^{\mathcal{U}}(X) = \oplus S^{\mathcal{U}}_n(X)$ l'ensemble des simplexes petits d'ordre $\mathcal{U}$

$C^{\mathcal{U}}(X) = R^{(S^{\mathcal{U}}(X))}$ le complexe de chaînes petites d'ordre $\mathcal{U}$ construit à partir de $S^{\mathcal{U}}(X)$. Si $s \in S^{\mathcal{U}}(X)$, $\partial_i s \in S^{\mathcal{U}}(X)$ où ∂_i est l'opérateur "i-ième face".

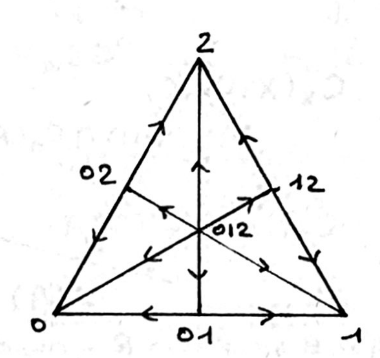
Alors $C^{\mathcal{U}}(X)$ est un sous-complexe du complexe $C(X)$ de chaînes singulières et :

> **Théorème des chaînes petites d'ordre $\mathcal{U}$** : (cf Spannier, Th 14 p 178)
> L'injection canonique $i : C^{\mathcal{U}}(X) \hookrightarrow C(X)$ est une équivalence de chaînes, donc induit un isomorphisme des modules d'homologie :
> $$\forall n \in \mathbb{N} \qquad H_n(X) \simeq H^{\mathcal{U}}_n(X)$$
> On peut donc calculer l'homologie $H(X)$ d'un espace topologique en considérant seulement les simplexes petits d'ordre $\mathcal{U}$.

NB : "$i : C^{\mathcal{U}}(X) \hookrightarrow C(X)$ est un équivalence de chaîne" signifie qu'il existe une déformation-rétraction $r : C(X) \longrightarrow C^{\mathcal{U}}(X)$, ie un morphisme de chaînes $r : C(X) \longrightarrow C^{\mathcal{U}}(X)$ tel que :

$$r \circ i = id_{C^{\mathcal{U}}(X)} \quad \text{et} \quad i \circ r \sim id_{C(X)}.$$

preuve : on peut utiliser la subdivision barycentrique (cf. Singer) : En dimension 2, étant donné le 2-simplexe (0,1,2) on construit 6 simplexes en construisant tous les centres de gravité de {0,1,2}, simplexes que l'on oriente en partant du cdg du simplexe (0,1,2) et en allant toujours vers un c.d.g. des extrémités (orientation centrifuge). On obtient :



Dans le cas général, on définit $S : C(X) \longrightarrow C(X)$ en posant pour tout n-simplexe s :
$$S(s) = \sum_{\sigma \in \Sigma_{n+1}} \varepsilon(\sigma)\, s \circ \gamma_\sigma \qquad \text{où}$$

$$\gamma_\sigma : \Delta^n \longrightarrow \Delta^n$$
$$0 \longmapsto 012\dots n$$
$$1 \longmapsto 01\dots\widehat{\sigma(0)}\dots n$$
$$2 \longmapsto 01\dots\widehat{\sigma(0)}\,\widehat{\sigma(1)}\dots n$$
$$\dots\dots\dots$$
$$n \longmapsto \sigma(n)$$

abus : on sous-entend $S : C(X) \to C(X)$ (car $C^{\mathcal{U}}(X) \subset C(X)$)

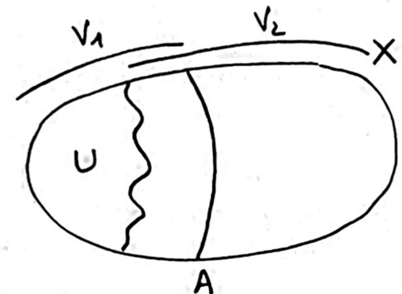
En prenant suffisamment de subdivisions, on a $S : C(X) \to C^{\mathcal{U}}(X) \subset C(X)$ et l'on montre que :

lemme (cf. Th. des modèles acycliques, Spanier) (cf III, L14 à L16)
[S est un morphisme de chaînes homotope à l'identité.

Ainsi $S_* : H(C(X)) = H(X) \longrightarrow H(C(X))$ est un isomorphisme, et même $S_* = id_{H_*(X)}$
$[\sigma] \longmapsto [S(\sigma)]$ donc $[S(\sigma)] = [\sigma] \quad \forall \sigma \in S_n(X)$

CQFD

Montrons l'axiome d'excision (A3) : Nous sommes dans la situation :



$\bar{U} \subset \mathring{A}$

et il faut montrer que $H_*(X\setminus U, A\setminus U) \longrightarrow H_*(X,A)$ est un isomorphisme.

Soit le recouvrement $\mathcal{V} = \{V_1, V_2\}$ défini par $V_1 = A$ et $V_2 = X\setminus U$.

On a : $\begin{cases} \mathring{V}_1 = \mathring{A} \\ \mathring{V}_2 = X\setminus\bar{U} \end{cases}$ donc $\mathring{\mathcal{V}}$ est encore un recouvrement de X d'après $\bar{U} \subset \mathring{A}$.

On a :

$$\left\{\begin{array}{l} S_n(A\setminus U) = S_n(X\setminus U) \cap S_n(A) \\ S_n^{\mathcal{V}}(X) = S_n(X\setminus U) \cup S_n(A) \\ S_n^{\mathcal{V}}(A) = S_n(A) \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} C_n(A\setminus U) = C_n(X\setminus U) \cap C_n(A) \\ C_n^{\mathcal{V}}(X) = C_n(X\setminus U) + C_n(A) \\ C_n^{\mathcal{V}}(A) = C_n(A) \end{array}\right.$$

donc :

$$C_*(X\setminus U, A\setminus U) \doteq \frac{C_*(X\setminus U)}{C_*(A\setminus U)} = \frac{C_*(X\setminus U)}{C_*(X\setminus U) \cap C_n(A)}$$

$$\simeq \frac{C_*(X\setminus U) + C_*(A)}{C_*(A)}$$ d'après

l'isomorphisme de Noether (si A et B sont des R-modules, alors $B/_{A\cap B} \simeq A+B/_A$. exercice : montrer cet isomorphisme en utilisant le lemme du serpent)

Ainsi : $C_*(X\setminus U, A\setminus U) \simeq {C^{\mathcal{U}}(X)}/{C^{\mathcal{U}}(A)} \xrightarrow{\alpha} {C_*(X)}/{C(A)}$

(par passage au quotient)

On obtient le diagramme :

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & C^{\mathcal{U}}(A) & \longrightarrow & C^{\mathcal{U}}(X) & \longrightarrow & C^{\mathcal{U}}(X)/C^{\mathcal{U}}(A) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \| \, id_{C(A)} & & \downarrow i & & \downarrow \alpha & & \\
0 & \longrightarrow & C(A) & \longrightarrow & C(X) & \longrightarrow & C(X,A) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

$id_{C(A)}$ induit un isomorphisme entre les R-modules d'homologie, et d'après le théorème des chaînes petites, $i : C^{\mathcal{U}}(X) \hookrightarrow C(X)$ induit aussi un isomorphisme en homologie, donc α induit un isomorphisme en homologie (cf. lemme ci-dessous) et par suite :

$$H_*(X,A) \simeq H_*\left(C^{\mathcal{U}}(X) / C^{\mathcal{U}}(A) \right) \simeq H_*(X\setminus U, A\setminus U) \quad \text{d'où le résultat.}$$

<u>lemme</u> : (lemme des 5) :

Soit le diagramme de complexes de chaînes dont les lignes sont exactes :

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & C & \longrightarrow & D & \longrightarrow & E & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma & & \\
0 & \longrightarrow & C' & \longrightarrow & D' & \longrightarrow & E' & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Si 2 applications parmi α, β et γ induisent des isomorphisme en homologie (ie. sont des "<u>quasi-isomorphismes</u>"), il en est de même de la troisième.

preuve : on écrit les suites exactes d'homologie longues :

$$\begin{array}{ccccccccc}
H_n(C) & \longrightarrow & H_n(D) & \longrightarrow & H_n(E) & \xrightarrow{\partial} & H_{n-1}(C) & \longrightarrow & H_{n-1}(D) \\
\wr\downarrow \alpha_* & & \wr\downarrow \beta_* & & \downarrow \gamma_* & & \wr\downarrow \alpha_* & & \wr\downarrow \beta_* \\
H_n(C') & \longrightarrow & H_n(D') & \longrightarrow & H_n(E') & \xrightarrow{\partial} & H_{n-1}(C') & \longrightarrow & H_{n-1}(D')
\end{array}$$

et le lemme des 5 (version classique) montre que γ_* est aussi un isomorphisme.

CQFD

<u>Conclusion</u> : L'homologie singulière vérifie bien les 4 axiomes de la théorie de l'homologie.

4°/ Application

Voici une application directe du théorème des chaînes petites d'ordre $\mathcal{U}$:

> **Proposition** (Suite exacte de Mayer-Vietoris)
> Si X est un espace topologique et si $X = A \cup B = \mathring{A} \cup \mathring{B}$, notons les injections canoniques :
>
> $$\begin{array}{ccccc} & & A & & \\ & {}^{i}\nearrow & & \searrow{}^{p} & \\ A\cap B & & & & A\cup B \\ & {}_{j}\searrow & & \nearrow{}_{q} & \\ & & B & & \end{array}$$
>
> On a la suite exacte :
>
> $$\cdots \xrightarrow{\partial} H_n(A\cap B) \xrightarrow{\binom{i_*}{j_*}} H_n(A)\oplus H_n(B) \xrightarrow{(p_*,-q_*)} H_n(A\cup B) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A\cap B) \longrightarrow \cdots$$

preuve : on a bien $(p_*,-q_*)\binom{i_*}{j_*} = p_* i_* - q_* j_* = (pi)_* - (qj)_* = 0$ car $pi = qj$.

D'autre part, on a $S(A) \cap S(B) = S(A\cap B)$. En passant aux R-modules libres engendrés, on obtient la suite exacte :

$$0 \longrightarrow C(A\cap B) \xrightarrow{\binom{i}{j}} C(A)\oplus C(B) \xrightarrow{(p,-q)} C(A)+C(B) \longrightarrow 0 \qquad (1)$$

Cette suite est exacte car $C(A)\cap C(B) = C(A\cap B)$ (~~c'est~~ (1) est un résultat général : si $X = E\cup F$ où E et F sont 2 ensembles et si $R^{(X)}$ désigne le R-module libre engendré par X, on a la suite exacte de R-modules : $0 \to R^{(E\cap F)} \xrightarrow{\binom{i}{j}} R^{(E)}\oplus R^{(F)} \xrightarrow{(p,-q)} R^{(E)}+R^{(F)} \to 0$ car $R^{(E)}\cap R^{(F)} = R^{(E\cap F)}$)

Or $C(A)+C(B) = C^{\mathcal{V}}(X)$ où $\mathcal{V} = \{A,B\}$ (car $S_n^{\mathcal{V}}(X) = S_n(A)\cup S_n(B)$) (cf. L9 verso)

et $C^{\mathcal{V}}(X) \simeq C(X)$ d'après le théorème des chaînes petites d'ordre $\mathcal{V} = \{A,B\}$, donc, en écrivant la suite exacte longue d'homologie associée à la suite (1), on obtient :

$$\cdots \xrightarrow{\partial} H_n(A\cap B) \xrightarrow{\binom{i_*}{j_*}} H_n(A)\oplus H_n(B) \xrightarrow{(p_*,-q_*)} H_n(X) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A\cap B) \longrightarrow \cdots$$

CQFD

Remarques : on peut montrer la suite de Mayer-Vietoris seulement à partir des axiomes de l'homologie.

exercice : Utiliser Mayer-Vietoris pour calculer $H_n(S^p)$ (ind : considérer 2 hémisphères de S^p).

Suite de Mayer-Vietoris (2^e version)

Une triade est un triplet (X,A,B) d'e.t tels que $A\subset X$ et $B\subset X$. On dit qu'une triade est excacte (ou encore propre) si les 2 inclusions :

$$(A, A\cap B) \hookrightarrow (A\cup B,\ B)$$
$$(B, A\cap B) \hookrightarrow (A\cup B,\ A)$$

sont des excisions, ie si $H_n(A, A\cap B) \simeq H_n(A\cup B, B)$ et $H_n(B, A\cap B) \simeq H_n(A\cup B, A)$.
(On a exciser respectivement $B\setminus(A\cap B)$ et $A\setminus(A\cap B)$ de $A\cup B$)

Théorème 1 : (Suite excacte de Mayer-Vietoris)
Si (X,A,B) est une triade excacte et si $X = A\cup B$, on a la suite excacte de MV :

$$\ldots \xrightarrow{\partial} H_n(A\cap B) \longrightarrow H_n(A)\oplus H_n(B) \longrightarrow H_n(X) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A\cap B) \longrightarrow \ldots$$

Théorème 2 : (Suite relative de Mayer-Vietoris)
Si (X,A,B) est une triade excacte, on a la suite excacte relative de MV :

$$\ldots \xrightarrow{\partial} H_n(X, A\cap B) \longrightarrow H_n(X,A)\oplus H_n(X,B) \longrightarrow H_n(X, A\cup B) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(X, A\cap B) \longrightarrow \ldots$$

(preuves : cf Greenberg, lect. on alg. top. §15 p72)

<u>Proposition</u> : (Brouwer 1920~1930)
(a) S^m a le même type d'homotopie que S^n ssi $m=n$.
(b) $\mathbb{R}^m$ est homéomorphe à $\mathbb{R}^n$ ssi $m=n$.
(c) (Théorème du point fixe de Brouwer) Si U est un ouvert convexe relativement compact de $\mathbb{R}^n$, toute application continue de $\bar{U}$ dans $\bar{U}$ admet au moins un point fixe.

preuve :
(a) Si S^m est homéomorphe à S^n, d'après l'axiome d'invariance homotopique (A2) on a : $H_k(S^m) \simeq H_k(S^n) \quad \forall k \in \mathbb{N}$
Comme $\begin{cases} H_k(S^n) = 0 \text{ si } k\neq 0 \text{ et } k \neq n \\ H_k(S^n) = R \text{ si } k=0 \text{ ou } k=n \end{cases}$ (où $n>0$)
on obtient nécessairement $m=n$
(b) Si $\mathbb{R}^m \simeq \mathbb{R}^n$, $S^m \simeq \mathbb{R}^m \setminus \{0\} \simeq \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \simeq S^n$ et le (a) implique $m=n$.
L'homologie généralise ici l'argument de connexité utilisé pour montrer que $\mathbb{R}^2$ ne peut pas être homéomorphe à $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ est connexe alors que $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ ne l'est pas)
NB : Il existe cependant des bijections de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$, et des surjections de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ appelées courbes de Peano.
(c) Soit $e^n = \{x \in \mathbb{R}^n / \|x\| \leq 1\}$. Si $f : e^n \to e^n$ n'a pas de point fixe, la demi-droite $[f(x), x)$ coupe $S^{n-1} = \partial e^n$ en un point $g(x)$. On montre facilement que g ainsi définie est continue et vérifie $g(x) = x$ pour tout $x \in \partial e^n$. g est donc une déformation-rétraction de e^n sur la sphère S^{n-1}, donc $H_{n-1}(e^n) \simeq H_{n-1}(S^{n-1})$, mais $H_{n-1}(e^n) = 0$ si $n \geq 2$ et $H_{n-1}(S^{n-1}) = \mathbb{Z}$ ce qui est absurde.

CQFD

<u>Remarque</u> : Un polyèdre est une réunion finie de simplexes. C'est donc un e.t. compact. Toute variété différentielle est triangularisable, de sorte que toute variété différentielle compacte soit un polyèdre.
Si $f : X \to X$ est une application continue, f induit des homomorphismes $f_n : H_n(X;\mathbb{Z}) \to H_n(X;\mathbb{Z})$ et $f_* : H_*(X;\mathbb{Z}) \to H_*(X;\mathbb{Z})$.
Définissons la trace de f par : $\operatorname{tr} f \doteq \sum_{n\geq 0} (-1)^n \operatorname{tr} f_n$, où $\operatorname{tr} f_n$ désigne la trace de la matrice qui représente $f_n : H_n(X;\mathbb{Z}) \to H_n(X;\mathbb{Z})$ lorsqu'on n'a pas tenu compte de la Torsion de $H_n(X;\mathbb{Z})$ (ie lorsqu'on a écrit $H_n(X,\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^r \oplus$ Torsion et considéré $f_n : \mathbb{Z}^r \to \mathbb{Z}^r$). On peut alors énoncer la généralisation suivante du Théorème de Brouwer :

Théorème du point fixe de Lefschetz : Soit X un polyèdre et $f : X \to X$ une application continue. Si $\operatorname{tr} f \neq 0$, alors f possède au moins un point fixe.

* Ce théorème généralise le th. de Brouwer car si $X = e^n$, l'homologie de X est triviale (ie. c'est l'homologie d'un point)

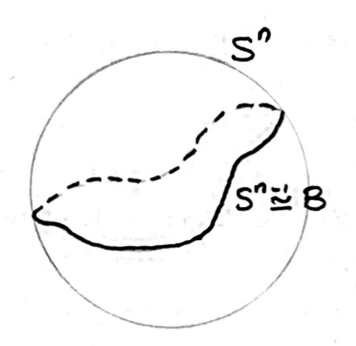
$$H_0(X) = \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad H_n(X) = 0 \quad \text{si } n > 0$$

de plus $f_n = id_{H_n(X)}$ donc $\operatorname{tr} f = 1 \neq 0$.

* Si $f : S^n \to S^n$ est un morphisme de classe C^∞ entre les 2 variétés diff. S^n, on montre que $\operatorname{tr} f = 1 + (-1)^n \deg f$ (où $\deg f$ est le degré de l'application f, cf Théorie de Morse)

Théorème de Jordan :

Soit $S^{n-1} \hookrightarrow B \subset S^n$ un plongement topologique de S^{n-1} dans S^n.
Alors $S^n \setminus B = U \dot{\cup} V$ où U et V sont 2 ouverts connexes disjoints de bord $\partial U = \partial V = B$.



preuve :

1) <u>Montrons que si $A \simeq I^k$ où $k \leq n$, et $A \subset S^n$, alors $\tilde{H}_*(S^n \setminus A) = 0$.</u>

Récurrence sur k :

* Si $k = 0$, $A \simeq *$ ($*$ = un point)
  et $\tilde{H}_*(S^n \setminus *) = \tilde{H}_*(\mathbb{R}^n) = 0$

* Supposons l'assertion vraie aux rangs $\leq k-1$, et montrons la au rang k. Soit $A \simeq I^k$ et $A \subset S^n$.
  A est homéomorphe à la réunion de 2 cubes $A' \cup A''$, et la suite exacte de Mayer-Vietoris écrite pour $S^n \setminus A'$ et $S^n \setminus A''$ donne, compte tenu des égalités :

$$(S^n \setminus A') \cap (S^n \setminus A'') = S^n \setminus A$$
$$(S^n \setminus A') \cup (S^n \setminus A'') = S^n \setminus (A' \cap A'')$$

S^n ; A, A', A'' ; $A' \cap A'' \leftarrow \sim I^{k-1} \times \{\frac{1}{2}\}$

$$\cdots \xrightarrow{\partial} H_i(S^n \setminus A) \to H_i(S^n \setminus A') \oplus H_i(S^n \setminus A'') \to H_i(S^n \setminus (A' \cap A'')) \xrightarrow{\partial} H_{i-1}(S^n \setminus A) \to \cdots$$

On a encore la même suite exacte en passant de partout à l'homologie réduite. Comme $A' \cap A''$ est homéomorphe à un cube de dimension $k-1$, l'hypothèse de récurrence donne

$$\tilde{H}_i(S^n \setminus (A' \cap A'')) = 0 \quad \text{pour } 0 \leq i \leq n$$

d'où :

$$\tilde{H}_i(S^n \setminus A) \xrightarrow{\sim} \tilde{H}_i(S^n \setminus A') \oplus \tilde{H}_i(S^n \setminus A'')$$

S'il existait $i \in [0, n]$ tel que $\tilde{H}_i(S^n \setminus A) \neq 0$, alors un des 2 termes de la somme $\tilde{H}_i(S^n \setminus A') \oplus \tilde{H}_i(S^n \setminus A'')$ ne serait pas nul. Par exemple $\tilde{H}_n(S^n \setminus A')$. On recommence alors le raisonnement précédent, et on continue par dichotomie.

On obtient une suite décroissante d'ensembles $\{A_j\}_{j \geq 0}$ tous homéomorphes au cube I^k et tels que $\tilde{H}_i(S^n \setminus A_j) \neq 0$.

$i : A \hookrightarrow X$

$i_* : H_n(A) \to H_n(X)$

injective ? X

On a $\tilde{H}_i(S^n \setminus A_j) \hookrightarrow \tilde{H}_i(S^n \setminus A_{j+1})$, et en passant à la limite inductive pour $j \to +\infty$, on obtient :

$$\varinjlim_j \tilde{H}_i(S^n \setminus A_j) \neq 0$$

Mais un raisonnement direct montre que $\varinjlim_j \tilde{H}_i(S^n \setminus A_j) = \tilde{H}_i(S^n \setminus \bigcap_{j \geq 0} A_j)$

En effet, un cycle z qui représente une classe d'homologie de $H_i(S^n \setminus \bigcap_{j \geq 0} A_j)$ n'intercepte jamais le compact $\bigcap_{j \geq 0} A_j$, de sorte qu'il existe un voisinage ouvert V de $\bigcap A_j$ qui ne rencontre pas ce cycle z. z ne rencontre donc jamais $\bigcap_{j=0}^{N} A_j = A_N$ pour $N \geq N_0$ (N_0 fixé), ie z est un cycle qui représente une classe d'homologie de $H_i(S^n \setminus \bigcap_{j=0}^{N} A_j) = H_i(S^n \setminus A_N)$ pour $N \geq N_0$, donc représente un cycle de $\varinjlim H_i(S^n \setminus A_j)$.

V A z $\bigcap_{j \geq 0} A_j$

L'inclusion réciproque $\varinjlim H_i(S^n \setminus A_j) \subset H_i(S^n \setminus \bigcap_{j \geq 0} A_j)$ provient de $H_i(S^n \setminus A_j) \subset H_i(S^n \setminus \bigcap_{j \geq 0} A_j)$ $(\forall j)$.

Mais alors :

$$H_i(S^n \setminus \bigcap_{j \geq 0} A_j) = 0$$

car $H_i(S^n \setminus \bigcap_{j=0}^{N} A_j) = 0$ par hyp de récurrence, puisque $\bigcap_{j=0}^{N} A_j \simeq$ cube de dimension $\leq k-1$ $(\forall N)$

retourner aux cycles.

puisque $H_i(S^n \setminus \bigcap_{j \geq 0} A_j) \subset H_i(S^n \setminus A_0 \cap A_1) = 0$ par hypothèse de récurrence, puisque $A_0 \cap A_1 \simeq I^{k-1}$.

D'où l'absurdité.

2) Montrons que si $S^k \simeq B \subset S^n$, où $k \leq n$, alors :

$$\begin{cases} \tilde{H}_i(S^n \setminus B) = 0 & \text{si } i \neq n-k-1 \\ \tilde{H}_{n-k-1}(S^n \setminus B) = \mathbb{Z} \end{cases}$$

Si c'est vrai, pour $B \simeq S^{n-1}$ on obtient : $\tilde{H}_0(S^n \setminus B) = \mathbb{Z}$
donc $H_0(S^n \setminus B) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ ie $S^n \setminus B$ possède 2 composantes connexes.

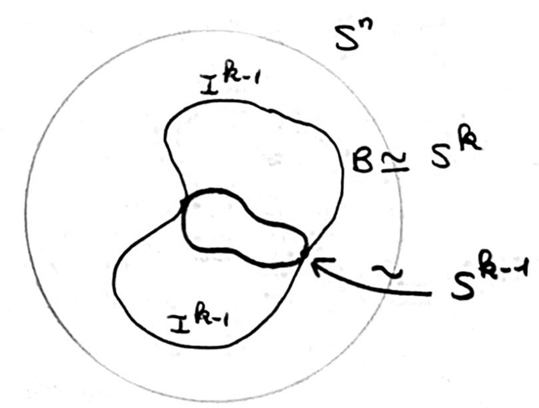
Procédons par récurrence sur k.

* Si $k = 0$, $\tilde{H}_*(S^n \setminus \{x_0, x_1\}) = \begin{cases} 0 & \text{si } * \neq n-1 \\ \mathbb{Z} & \text{si } * = n-1 \end{cases}$

puisque $S^n \setminus \{x_0, x_1\} \simeq \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ qui a le même type d'homotopie que S^{n-1}.

* Si la propriété 2) est vrai pour tous les rangs $\leq k-1$, montrons la au rang k.

Notons B_+, B_- et E les images respectives de l'hémisphère nord $\{\|x\| = 1 \text{ et } x_{k+1} \geq 0\}$ de S^k, de l'hémisphère sud $\{\|x\| = 1 \text{ et } x_{k+1} \leq 0\}$ de S^k et de l'équateur S^{k-1} de S^k par le plongement $S^k \simeq B \subset S^n$.



On a :

$$\begin{cases} B_+ \cup B_- = B \simeq S^k \\ B_+ \cap B_- = E \simeq S^{k-1} \end{cases}$$

La suite de Mayer-Vietoris pour $(S^n \setminus B_+) \cap (S^n \setminus B_-) = S^n \setminus B$
et $(S^n \setminus B_+) \cup (S^n \setminus B_-) = S^n \setminus E$

donne :

$$\cdots \xrightarrow{\partial} H_i(S^n \setminus B) \to H_i(S^n \setminus B_+) \oplus H_i(S^n \setminus B_-) \to H_i(S^n \setminus E) \xrightarrow{\partial} H_{i-1}(S^n \setminus B) \to \cdots$$

On a $B_- \simeq B_+ \simeq I^k$, de sorte que le * 1) donne :

$$\tilde{H}_i(S^n \setminus B_-) \simeq \tilde{H}_i(S^n \setminus B_+) \simeq 0 \quad \text{pour } 0 \leq i \leq n.$$

L'hypothèse de récurrence donne, puisque $E \simeq S^{k-1}$:

$$\begin{cases} \tilde{H}_i(S^n \setminus E) = 0 & \text{si } i \neq n-k \\ \tilde{H}_i(S^n \setminus E) = \mathbb{Z} & \text{si } i = n-k \end{cases}$$

Si $i \neq n-k-1$, on a : $0 \to \tilde{H}_i(S^n \setminus B) \to 0$ donc $\tilde{H}_i(S^n \setminus B) = 0$

Si $i = n-k-1$, on obtient :

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \tilde{H}_i(S^n \setminus B) \to 0 \quad \text{donc} \quad \tilde{H}_i(S^n \setminus B) = \mathbb{Z}$$

ce qui prouve le 2).

3) On a montré que $S^n \setminus B = U \cup V$ où U et V sont 2 ouverts connexes(*) disjoints. Il faut encore vérifier que $\partial U = \partial V = B$.

U ouvert donc $\partial U \subset \complement U$
V ouvert donc $\partial U \cap V = \emptyset$ $\Big\} \Rightarrow \partial U \subset B$

Montrons que $B \subset \partial U$: soit $x \in B$.

Le 1) donne :

$$\tilde{H}_0(S^n \setminus (B \setminus \{x\})) = 0$$

donc $S^n \setminus (B \setminus \{x\})$ est connexe, en fait connexe par arcs.

Si $\alpha \in U$ et $\beta \in V$, soit γ un chemin de $S^n \setminus (B \setminus \{x\})$ d'origine α et d'extrémité β. γ passe nécessairement par x, de sorte que tout voisinage ouvert $\mathcal{U}$ de x dans S^n rencontre un point de $\gamma \cap U$ et un point de $\gamma \cap V$.

CQFD

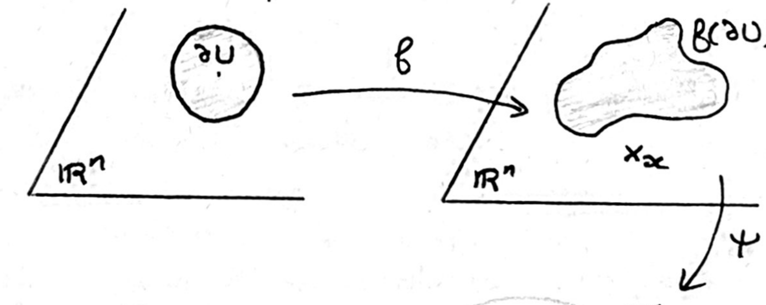
((*) Les composantes connexes d'un ouvert d'un e.t. sont des ouverts)

<u>Corollaire</u> : Toute bijection continue de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ est un homéomorphisme.

NB : C'est une généralisation d'un résultat admis en terminale (" toute application strictement monotone et continue sur un intervalle de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est une bijection sur son image, et d'inverse continue)

preuve : Montrons que toute bijection continue $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est ouverte.

Soit U une boule ouverte de $\mathbb{R}^n$, $\bar{U}$ son adhérence et $\partial U \simeq S^{n-1}$ son bord.



Si $x \notin f(\bar{U})$, $\mathbb{R}^n \setminus \{x\}$ est homéomorphe à S^n. En notant $\Psi : \mathbb{R}^n \setminus \{x\} \to S^n$ cet homéomorphisme, $\Psi \circ f(\partial U) \doteq B$ est inclus dans S^n et homéomorphe à S^{n-1} (<u>car</u> $f(\bar{U})$ est homéomorphe à une boule fermée de $\mathbb{R}^n$)

Ainsi $S^n \setminus B = \mathcal{U}' \dot\cup \mathcal{V}'$ est la réunion de 2 ouverts connexes disjoints qui correspondent, par l'homéomorphisme φ, à 2 ouverts connexes disjoints de $\mathbb{R}^n \setminus \{x\}$, notés $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$, ie :

$$(\mathbb{R}^n \setminus \{x\}) \setminus f(\partial U) = \mathcal{U} \cup \mathcal{V}$$

Comme $x \notin f(\bar{U})$, on peut écrire :

$$\mathbb{R}^n \setminus f(\partial U) = \mathcal{U} \dot\cup \mathcal{V} \quad \text{(en intégrant } x \text{ dans } \mathcal{U} \text{ (ou } \mathcal{V}))$$

L'application continue $f : \mathbb{R}^n \setminus \partial U \longrightarrow \mathbb{R}^n \setminus f(\partial U)$ transforme les composantes connexes de $\mathbb{R}^n \setminus \partial U$, à savoir U et $\mathbb{R}^n \setminus \bar{U}$, dans les composantes connexes de $\mathbb{R}^n \setminus f(\partial U)$, à savoir $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$,
Donc $f(U) \subset \mathcal{U}$, par exemple. Comme f est bijective, on aura nécessairement $f(U) = \mathcal{U}$ qui est ouvert !
(si $f(U) \subsetneq \mathcal{U}$, $\exists\, v \in \mathbb{R}^n \setminus \bar{U} \,/\, f(v) \in \mathcal{U}$, ce qui est absurde car cela impliquerait que $f(\mathcal{V}) \subset \mathcal{U}$ puisqu'on ne peut pas avoir en même temps $f(\mathcal{V}) \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$ et $f(\mathcal{V}) \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$)

CQFD

III Le Théorème des modèles acycliques

Ce théorème est souvent utilisé :

* Dans la méthode de subdivisions barycentrique, pour montrer que l'application $C_*(X) \longrightarrow C_*(X)$, $s \longmapsto \sum \varepsilon(\sigma)\, S_\sigma \circ s$ était une équivalence de chaînes.

(Rappel : un morphisme de chaînes $\tau : C \to C'$ est une équivalence de chaînes ssi il existe un morphisme de chaîne $\eta : C' \to C$ tel que $\tau \circ \eta$ et $\eta \circ \tau$ soient homotopes, comme complexes de chaînes, respectivement à $id_{C'}$ et à id_C)

* Pour montrer le théorème d'Eilenberg-Zilber qui affirme qu'il existe une équivalence de chaînes $C_*(X) \otimes C_*(Y) \xrightarrow{\ \simeq\ } C_*(X \times Y)$
* Pour montrer l'existence d'une équivalence de chaînes entre $\square_*(X) \xrightarrow{\ \simeq\ } C_*(X)$, où $\square_*(X)$ désigne le complexe de chaînes obtenu à partir de l'e.t. X en remplaçant les simplexes singuliers par des cubes singuliers.

Définitions :

Un R-module X est projectif si pour tout morphisme $f : X \to B$ et pour toute suite exacte de R-modules $A \xrightarrow{g} B \to 0$ il existe un morphisme $h : X \to A$ tel que $g \circ h = f$

$$\begin{array}{ccccc} & & X & & \\ & \swarrow^{h} & \downarrow f & & \\ A & \xrightarrow[g]{} & B & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Un complexe de chaînes positif :

$$P_* : \dots \to P_n \xrightarrow{\partial} P_{n-1} \to \dots \to P_0 \to 0$$

est dit projectif (resp. acyclique) si tous les R-modules P_n sont projectifs (resp. si $H_n(P_*) = 0$ dès que $n > 0$)

exercices : a) Tout R-module libre est projectif

b) Soit d un diviseur de $n \in \mathbb{N}^*$. $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ est un $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-module projectif ssi $\Delta(d, \frac{n}{d}) = 1$.

lemme : Soient P_* un complexe projectif positif de R-modules, Q_* un complexe acyclique positif de R-modules et $\varphi : H_0(P_*) \to H_0(Q_*)$ un homomorphisme de groupes.
Alors il existe un morphisme de chaînes $f : P_* \to Q_*$ tel que $H_0(f) = \varphi$, et de plus f est unique à homotopie de chaînes près.

preuve :

Existence : Il faut compléter les barreaux de l'échelle :

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots & \xrightarrow{\partial_2} & P_1 & \xrightarrow{\partial_1} & P_0 & \xrightarrow{p} & H_0(P_*) = P_0/\partial P_1 & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow f_1 & \searrow^{f_0\circ\partial_1} & \downarrow f_0 & \searrow^{\varphi\circ p} & \downarrow \varphi \text{ donné} & & \\ \cdots & \xrightarrow[\partial_2]{} & Q_1 & \xrightarrow[\partial_1]{} & Q_0 & \xrightarrow[q]{} & H_0(Q_*) = Q_0/\partial Q_1 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

φ est donné et $\varphi\circ p : P_0 \to H_0(Q_*)$. Comme q est surjectif et P_0 projectif, il existe $f_0 : P_0 \to Q_0$, R-morphisme, tel que $\varphi\circ p = q\circ f_0$.

Ainsi $f_0\circ\partial_1 : P_1 \to Q_0$, et on a $\mathrm{Im}(f_0\circ\partial_1) \subset \partial_1 Q_1$ (car si $z\in P_1$, $q[f_0\circ\partial_1(z)] = \varphi\circ p\circ\partial_1(z) = 0$ donc $f_0\circ\partial_1(z) \in \mathrm{Ker}\, q = \partial Q_1$). On peut encore conclure : $f_0\circ\partial_1$ arrive dans $\partial_1 Q_1$ et P_1 est projectif, donc il existe $f_1 : P_1 \to Q_1$ tel que $f_0\circ\partial_1 = \partial_1\circ f_1$.

Récurrence sur k : Pour $k>1$, on aura la situation :

$$\begin{array}{ccccccccc} P_k & \xrightarrow{\partial_k} & P_{k-1} & \xrightarrow{\partial_{k-1}} & P_{k-2} & \longrightarrow & P_{k-3} & \longrightarrow & \cdots \\ f_k \,\vdots\downarrow & \searrow^{f_{k-1}\circ\partial_k} & \downarrow f_{k-1} & & \downarrow f_{k-2} & & \downarrow & & \\ Q_k & \xrightarrow[\partial_k]{} & Q_{k-1} & \xrightarrow[\partial_{k-1}]{} & Q_{k-2} & \longrightarrow & Q_{k-3} & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

$\mathrm{Im}(f_{k-1}\circ\partial_k) \subset \partial_k Q_k$ puisque si $z\in P_k$, on a

$$\partial_{k-1}(f_{k-1}\circ\partial_k(z)) = f_{k-2}\circ\partial_{k-1}\circ\partial_k(z) = 0$$

donc $f_{k-1}\circ\partial_k(z) \in \mathrm{Ker}\,\partial_{k-1} = \mathrm{Im}\,\partial_k$
(cf $H_{k-1}(Q_*) = 0$)

P_k est projectif, et $f_{k-1}\circ\partial_k : P_k \to \partial_k Q_k$ donc il existe un morphisme $f_k : P_k \to Q_k$ qui rende le triangle commutatif :

$$f_{k-1}\circ\partial_k = \partial_k\circ f_k$$

$f = \{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ est parfaitement construit et commute avec les différentielles ∂_k, c'est donc un morphisme de chaînes. Il vérifie $H_0(f) = \varphi$ par construction.

<u>Unicité</u> : Si $f' : P_* \to Q_*$ est un autre morphisme de chaînes qui vérifie la m̂ condition que f, $f'-f$ vérifie $H_0(f'-f) = 0$. Tout revient donc à montrer que si $f : P_* \to Q_*$ vérifie $H_0(f) = 0$, alors f est "chain-homotopic" à l'application nulle 0.

Il faut construire une homotopie $H = \{H_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $H_n : P_n \to Q_{n+1}$, qui vérifie : $\partial_{n+1} H_n + H_{n-1}\partial_n = f_n \quad \forall n \geq 0$

$$\begin{array}{ccccccccc} \to & P_2 & \xrightarrow{\partial_2} & P_1 & \xrightarrow{\partial_1} & P_0 & \xrightarrow{p} & H_0(P_*) & \to 0 \\ & \downarrow f_2 & \swarrow H_1 & \downarrow f_1 & \swarrow H_0 & \downarrow f_0 & & \downarrow 0 = H_0(f) & \\ \to & Q_2 & \xrightarrow[\partial_2]{} & Q_1 & \xrightarrow[\partial_1]{} & Q_0 & \xrightarrow{q} & H_0(Q_*) & \to 0 \end{array}$$

$\forall z \in P_0 \quad q \circ f_0(z) = 0$ donc $f_0(z) \in \operatorname{Ker} q = \partial_1 Q_1$.

Ainsi $f_0 : P_0 \to \partial_1 Q_1$. Comme P_0 est projectif, il existe $H_0 : P_0 \to Q_1$ telle que $f_0 = \partial_1 \circ H_0$

Considérons maintenant $f_1 - H_0\partial_1 : P_1 \to Q_1$

$\forall z \in P_1 \quad \partial_1(f_1(z) - H_0\partial_1(z)) = \partial_1 f_1(z) - \partial_1 H_0 \partial_1(z)$

$= \partial_1 f_1(z) - f_0\partial_1(z) = 0$ car f est un morphisme de chaînes. Donc $(f_1 - H_0\partial_1)(z) \in \operatorname{Im}\partial_2 = \operatorname{Ker}\partial_1$ car Q_* est acyclique, et comme P_1 est projectif, on aura l'existence de $H_1 : P_1 \to Q_2$ tel que $\partial_2 H_1 = f_1 - H_0\partial_1$.

On procède ainsi par récurrence pour construire H :

Si $H_0, \dots, H_{k-1}$ sont déjà construits tels que $\partial_{n+1} H_n + H_{n-1}\partial_n = f_n$, construisons H_k :

$$\begin{array}{ccccccc} \to & P_{k+1} & \xrightarrow{\partial_{k+1}} & P_k & \xrightarrow{\partial_k} & P_{k-1} & \to \\ & \downarrow f_{k+1} & \swarrow H_k & \downarrow f_k & \swarrow H_{k-1} & \downarrow f_{k-1} & \\ \to & Q_{k+1} & \xrightarrow[\partial_{k+1}]{} & Q_k & \xrightarrow[\partial_k]{} & Q_{k-1} & \to \end{array}$$

H_k doit vérifier $\partial_{k+1} H_k = f_k - H_{k-1}\partial_k$. Considérons donc l'application

$$f_k - H_{k-1}\partial_k : P_k \to Q_k$$

$\forall z \in P_k \quad \partial_k(f_k(z) - H_{k-1}\partial_k(z)) = \partial_k f_k(z) - \partial_k H_{k-1}\partial_k(z)$

mais $\partial_k H_{k-1} = f_{k-1} - H_{k-2}\partial_{k-1}$ par hypothèse de récurrence,

donc : $\partial_k(f_k(z) - H_k\partial_k(z)) = \partial_k f_k(z) - f_{k-1}\partial_k(z) - H_{k-2}\partial_{k-1}\partial_k(z)$

$= 0$ (car f est un morphisme de chaînes et $\partial_{k-1}\partial_k = 0$)

Donc $\mathrm{Im}(f_k - H_{k-1}\partial_k) \subset \mathrm{Ker}\,\partial_k = \mathrm{Im}\,\partial_{k+1}$ car Q_* est acyclique.
Enfin, comme P_k est projectif, il existe $H_k : P_k \to Q_{k+1}$ tel que $\partial_{k+1} H_k = f_k - H_{k-1}\partial_k$, ce qui montre la récurrence.
CQFD

Un foncteur G : Top $\longrightarrow$ R-mod de la catégorie des e.t. dans celle des complexes de R-modules est dit libre sur les modèles $\mathcal{M} = \{M\}_{M\in\mathcal{M}}$ (où les M désignent des e.t) si :

$$\forall M \in \mathcal{M} \quad \exists g_M \in G(M) \quad \forall X \text{ e.t} \quad G(X) \simeq R^{(\{G(f)g_M\}_{f\in C^0(M,X)})}$$

Notons Compl$^+$-R-mod la catégorie des complexes positifs de R-modules.
Un foncteur $G = \{G_n\}_{n\in\mathbb{N}}$: Top $\longrightarrow$ Compl$^+$-R-mod est dit libre sur la famille de modèles $\mathcal{M} = \{\mathcal{M}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ si chacune de ses composantes est libre sur les modèles $\mathcal{M}_n$ correspondants. Le foncteur G est dit acyclique sur $\mathcal{M}$ si :

$$\forall M \in \mathcal{M} \qquad G(M) \text{ est acyclique } (\text{ie } H_n(G(M)) = 0 \text{ pour } n > 0)$$

Théorème des modèles acycliques (cf. Spanier p164)
Soient G, G' : Top $\longrightarrow$ Compl$^+$-R-mod qui vérifient :

$$\begin{cases} G \text{ est libre de modèle } \mathcal{M} \\ G' \text{ est acyclique sur } \mathcal{M} \end{cases}$$

Alors tout morphisme de foncteurs $H_0(G) \to H_0(G')$ est induit par un morphisme de foncteurs $G \to G'$ unique à homotopie près.

Rappel : (Morphisme de foncteurs) Soient $F, G : \mathcal{R} \to \mathcal{R}'$ deux foncteurs covariants. On appelle morphisme de foncteurs de F dans G la donnée, pour chaque objet $X \in \mathcal{R}$, d'un homomorphisme $f_X : F(X) \longrightarrow G(X)$ tel que pour tout $X, Y \in \mathcal{R}$ et pour tout $u \in \mathrm{Hom}(X,Y)$ le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{F(u)} & F(Y) \\ {\scriptstyle f_X}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_Y} \\ G(X) & \xrightarrow[G(u)]{} & G(Y) \end{array}$$

Dans le cas du théorème, un morphisme de foncteurs de $G \to G'$ est donc une collection $\{f_X\}_{X=e.t}$ de morphismes de chaînes $f_X : G(X) \to G'(X)$ (qui commutent donc avec les différentielles) qui rend le diagramme ci-dessus commutatif. L'unicité "à homotopie près" signifie simplement que pour tout X e.t, f_X est unique à une homotopie de chaînes près.

Application :

1) Montrons l'existence d'une équivalence de chaînes entre $C_*(X)$ et $\square_*(X)$

Notons $C_* = \{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ (resp. $\square_* = \{\square_n\}_{n\in\mathbb{N}}$) le foncteur qui à tout e.t. X associe son complexe de chaîne singulières $C_*(X)$ (resp. son complexe de chaînes singulières $\square_*(X)$ construit en utilisant des cubes au lieu des simplexes)

C_n est un foncteur libre sur le modèle $\mathcal{M} = \{\Delta^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ où Δ^n désigne le n-simplexe standard de $\mathbb{R}^{n+1}$. En effet, posons $g_{\Delta^n} = id_{\Delta^n} \in C_n(\Delta^n)$ Alors :

$$\forall X \text{ e.t.} \qquad C_n(X) \doteqdot \mathbb{R}^{C^0(\Delta^n, X)} = R^{(\{C_n(\sigma)g_{\Delta^n}\}_{\sigma\in C^0(\Delta^n,X)})}$$

De même, $\square_n$ est libre de modèles $\{I^n\}$. Ainsi, les foncteurs C_* et $\square_*$ sont libres de modèles $\{\Delta^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ et $\{I^n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

$C_*(I^n)$ et $\square_*(\Delta^n)$ sont acycliques car l'homologie d'un cube I^n ou d'un simplexe Δ^n est celle du point, le cube ou le simplexe admettant toujours une déformation-rétraction sur 1 point.
On peut donc appliquer le théorème des modèles acycliques avec :

1) avec $\begin{cases} C_* = \text{foncteur libre de modèle } \{\Delta^n\}_{n\in\mathbb{N}} \\ \square_* = \text{foncteur acyclique sur } \{\Delta^n\}_{n\in\mathbb{N}} \end{cases}$
et pour le morphisme de foncteurs $id : H_0(C_*) \longrightarrow H_0(\square_*)$
(puisque $\Delta^0 = I^0$ et $\Delta^1 = I^1 \Rightarrow H_0(C_*) = H_0(\square_*)$)

2) avec $\begin{cases} \square_* = \text{foncteur libre de modèle } \{I^n\}_{n\in\mathbb{N}} \\ C_* = \text{foncteur acyclique sur } \{I^n\}_{n\in\mathbb{N}} \end{cases}$
et pour le morphisme de foncteurs $id : H_0(\square_*) \longrightarrow H_0(C_*)$

Il existe donc 2 morphismes de foncteurs
$$f : C_* \longrightarrow \square_*$$
et
$$g : \square_* \longrightarrow C_*$$
tels que $H_0(f) = H_0(g) = id$

$g\circ f : C_* \longrightarrow C_*$ et $id : C_* \longrightarrow C_*$ sont 2 morphismes de foncteurs tels que $H_0(g\circ f) = id_{H_0(C_*)}$, donc sont homotopes d'après le Th. des modèles acycliques. Cela signifie que si X est un e.t. quelconque,
$$f_X : C_*(X) \longrightarrow \square_*(X)$$
$$g_X : \square_*(X) \longrightarrow C_*(X)$$
sont des morphismes de chaînes tels que $g_X \circ f_X : C_*(X) \longrightarrow C_*(X)$

et $f_X \circ g_X : \square_*(X) \to \square_*(X)$ soient chain-homotopes à l'identité,
donc : $\begin{cases} H_n(id_{C_*(X)}) = H_n(g_X \circ f_X) = H_n(g_X) \circ H_n(f_X) \\ H_n(id_{\square_*(X)}) = H_n(f_X \circ g_X) = H_n(f_X) \circ H_n(g_X) \end{cases}$
où $H_n(id_{C_*(X)}) = id_{H_n(C_*(X))}$ et $H_n(id_{\square_*(X)}) = id_{H_n(\square_*(X))}$.

f_X et g_X sont donc des équivalences de chaînes, et $H_n(f_X) : H_n(X) \xrightarrow{\sim} H_n^\square(X)$ est un isomorphisme de R-modules.

Conclusion : $H_n(X) \simeq H_n^\square(X)$, ie on peut utiliser indifféremment des simplexes ou des cubes pour définir l'homologie singulière de X.

2) Subdivisions barycentriques :

$$\underset{\text{libre sur } \{\Delta^n\}_{n\in\mathbb{N}}}{C_*(X)} \underset{id_{C_*(X)}}{\xrightarrow{S}} \underset{\text{acyclique sur } \{\Delta^n\}_{n\in\mathbb{N}}}{C_*(X)}$$

S et $id_{C_*(X)}$ induise la même application sur $H_0(C_*(X))$, donc S et $id_{C_*(X)}$ sont chaines-homotopes.
Ainsi $H_n(S) = H_n(id_{C_n(X)}) = id_{H_n(X)}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ et le théorème des chaînes petites d'ordre $\mathcal{U}$ (cf. L8) est montré.

IV Homologie et cohomologie à coefficients

1°/ Rappels : produit tensoriel (cf. Querré) (U Produit tensoriel)

Soient A et B deux R-modules, où R désigne un anneau commutatif unitaire. Le produit tensoriel est l'unique R-module qui vérifie la propriété universelle : Pour tout R-module C et pour toute application R-bilinéaire $f : A \times B \to C$, il existe un unique R-morphisme $\tilde{f}$ qui rende le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{array}{ccc} A \times B & \xrightarrow{f \text{ bil}} & C \\ & {}_{\text{bil } p}\searrow \quad \nearrow_{\tilde{f} \text{ linéaire}} & \\ & A \otimes_R B = \text{produit tensoriel de } A \text{ par } B & \end{array}$$

(existence : voir Querré)

Propriétés : Soit R un anneau commutatif et S un ensemble. On note $R^{(S)}$ le R-module libre engendré par S, ie l'ensemble des applications à support fini de S dans R. Notons $e_x \in R^{(S)}$ l'élément défini par :

$$e_x : S \to R, \quad z \mapsto \delta_{xz}$$

(1) Pour tout R-module M, on a :

$$\boxed{\begin{array}{l} R^{(S)} \otimes_R R^{(T)} \simeq R^{(S\times T)} \\ R^{(S)} \otimes_R M \simeq M^{(S)} \\ R \otimes_R M \simeq M \end{array}}$$

On le montre en utilisant la propriété universelle. Si l'on pose :

$$f : R^{(S)} \times R^{(T)} \longrightarrow R^{(S\times T)}$$
$$\left(\sum_S \alpha_x e_x, \sum_T \beta_y e_y\right) \longmapsto \sum_{(x,y)\in S\times T} \alpha_x \beta_y e_{(x,y)}$$

on constate que f est bilinéaire et que le diag. suiv. est commutatif pour toute appl. bilinéaire g :

$$\begin{array}{ccc} R^{(S)} \times R^{(T)} & \xrightarrow{g} & M = R\text{-module} \\ f \downarrow & \nearrow_{\tilde{g} \text{ lin.}} & \\ R^{(S\times T)} & & \end{array}$$

(où $\tilde{g}(e_{(x,y)}) = g(e_x, e_y)$ est complétée par linéarité)

donc $R^{(S)} \otimes_R R^{(T)} \simeq R^{(S\times T)}$

Considérons le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} R^{(S)} \times M & \xrightarrow{g} & N = R\text{-module} \\ (\sum \alpha_x e_x, m) & & \\ f \downarrow & \nearrow & \\ M^{(S)} & & \\ \sum (\alpha_x m) e'_x & & \end{array}$$

$\tilde{g}$ = morphisme de R-modules défini par $\tilde{g}(m e'_x) = g(e_x, m)$ et complété par linéarité.

(où $e'_x : S \to M$, $z \mapsto \delta_{xz}$)

Ainsi $R^{(S)} \otimes M \simeq M^{(S)}$

On peut prendre $N = R^{(S)} \otimes M$ et avoir l'isomorphisme :

$$\begin{array}{ccc} R^{(S)} \times M & \xrightarrow{p} & R^{(S)} \otimes M \\ f \downarrow & \nearrow & \\ M^{(S)} & & \end{array}$$

$\tilde{p}$ isom. de R-mod : $\tilde{p}(m e'_x) = e_x \otimes m$

$r \otimes m \to$ identifié à $\to r.m$

Enfin, si P est un singleton, $M^{(P)} \simeq M$ d'où $R \otimes_R M \simeq R^{(P)} \otimes M \simeq M^{(P)} \simeq M$,
ce que l'on peut obtenir directement en utilisant la propriété universelle.

(2) $$\boxed{A/_B \otimes_R C \simeq \frac{A \otimes_R C}{B \otimes_R C} \simeq \frac{A \otimes_R C}{\{b \otimes c \,/\, b \in B\}}}$$ (où l'on note $p(a \otimes b) = a \otimes b$ si $(a,b) \subset A \times B$)

Plus généralement, on a la formule $A/_{A'} \otimes B/_{B'} \simeq \dfrac{A \otimes B}{A' \otimes B + A \otimes B'}$ (utiliser la pro. universelle) (cf [U] Produit tensoriel)

De (2) on déduit :

(3) Le produit tensoriel définit un foncteur exact à droite, ie
pour toute suite exacte de R-modules $A \xrightarrow{g} B \xrightarrow{f} C \to 0$
on a la suite exacte $A \otimes_R N \to B \otimes_R N \to C \otimes_R N \to 0$

En effet, $C \simeq B/_A \Rightarrow C \otimes N \simeq (B/_A) \otimes N \simeq \dfrac{B \otimes N}{A \otimes N}$ d'après le (2).

seulement si g injective ! ce qui n'est pas le cas ici

Cavalier ! Il faut préciser les flèches

(4) $$\boxed{A \otimes_R B \simeq B \otimes_R A \quad \text{et} \quad (A \oplus B) \otimes C \simeq (A \otimes C) \oplus (B \otimes C)}$$

(5) $\mathbb{Z}/_{m\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}} \simeq \mathbb{Z}/_{d\mathbb{Z}}$ où $d = \Delta(m,n)$ est le pgcd de m et n.

On le montre en constatant que $\mathbb{Z}/_{m\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}$ admet $\dot{1} \otimes_{\mathbb{Z}} \bar{1}$ comme générateur (puisque $\dot{x} \otimes \bar{y} = xy . \dot{1} \otimes \bar{1}$), et que :

$$\begin{cases} m\, \dot{1} \otimes \bar{1} = 0 \\ n\, \dot{1} \otimes \bar{1} = 0 \end{cases} \Rightarrow \cancel{d(\dot{1} \otimes \bar{1}) = 0} \Rightarrow \omega(\dot{1} \otimes \bar{1}) \mid d$$

(où $\omega(\dot{1} \otimes \bar{1})$ désigne l'ordre de $\dot{1} \otimes \bar{1}$)

En fait $\omega(\dot{1} \otimes \bar{1}) = d$ (sinon $\omega(\dot{1} \otimes \bar{1}) = k < d$ et $k(\dot{1} \otimes \bar{1}) = \dot{k} \otimes \bar{1} \neq 0$ car $k < m$), d'où le résultat.

non prouvé ! faux
voir [U] Prod. Tensoriel

Remarque : Le produit tensoriel n'est pas exact à gauche, car on a le contre exemple :

$(\bar{1})$ $$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\times 6} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/_{6\mathbb{Z}} \to 0 \qquad (\otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/_{4\mathbb{Z}})$$

$(\bar{2})$ $$\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/_{4\mathbb{Z}} \xrightarrow{\times 6} \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/_{4\mathbb{Z}} \to \mathbb{Z}/_{6\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{Z}/_{4\mathbb{Z}} \to 0$$

$$\begin{matrix} \wr\!\wr & & \wr\!\wr & & \wr\!\wr \\ \mathbb{Z}/_{4\mathbb{Z}} & & \mathbb{Z}/_{4\mathbb{Z}} & & \mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}} \end{matrix}$$

en tenant compte de (1) et de l'expression de ces isomorphismes, on a :

$$\begin{matrix} (x \otimes \dot{y}) & \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/_{4\mathbb{Z}} & \xrightarrow{\times 6} & \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/_{4\mathbb{Z}} & 6x \otimes \dot{y} \\ \downarrow & \downarrow \wr & & \downarrow \wr & \downarrow \wr \\ x\dot{y} & \mathbb{Z}/_{4\mathbb{Z}} & \xrightarrow{\times 6} & \mathbb{Z}/_{4\mathbb{Z}} & 6x.\dot{y} \end{matrix}$$

ce qui prouve que l'appl. $\mathbb{Z}/_{4\mathbb{Z}} \to \mathbb{Z}/_{4\mathbb{Z}}$ induite est encore la multiplication par 6.

La suite exacte $(\tilde{2})$ s'écrit :

$$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \xrightarrow[\times 6 = \times 2]{u} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \longrightarrow \underbrace{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}_{12} \longrightarrow 0$$

$$\left(\frac{\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}} = \text{conoyau} \right)$$

Cette suite n'est pas exacte à gauche car $\operatorname{Ker} u = \{\dot{0}, \dot{2}\} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ donc :

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \xrightarrow[\times 2]{u} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

2°/ Foncteurs dérivés et foncteur de Torsion

Définition : Un foncteur F : R-Mod $\longrightarrow$ R-Mod est exact (resp. exact à droite) si pour toute suite exacte (resp. exacte à droite) de R-modules $0 \to A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C \to 0$, l'image $0 \to F(A) \xrightarrow{F(u)} F(B) \xrightarrow{F(v)} F(C) \to 0$ (resp. $F(A) \to F(B) \to F(C) \to 0$) est encore une suite exacte.

(pour semi-exact à droite, on suppose seulement que $A \to B \to C \to 0$)

On va introduire la notion de foncteurs dérivés qui va mesurer le défaut d'exactitude d'un foncteur exact à droite et additif(*).

Définition : On appelle i-ième foncteur dérivé à gauche de F le foncteur $L_i F$ qui vérifie :

(1) $L_0 F = F$

(2) Pour toute suite exacte $0 \to A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C \to 0$ il existe des opérateurs bords $\partial_i : L_i F(C) \to L_{i-1} F(A)$ tels que l'on ait la suite exacte naturelle :

$$\cdots \longrightarrow L_2 F(C) \xrightarrow{\partial_2} L_1 F(A) \longrightarrow L_1 F(B) \longrightarrow L_1 F(C) \xrightarrow{\partial_1} F(A) \longrightarrow F(B) \to F(C) \to 0$$

Les foncteurs dérivés sont parfaitement caractérisés par ces 2 conditions.

Construction de $L_i F$: Étant donné un foncteur exact à droite F, il s'agit de montrer l'existence des foncteurs dérivés $L_i F$.

Soit M un R-module. On peut toujours choisir un complexe de R-modules projectif(+), noté P_* : $\cdots \to P_n \xrightarrow{\partial} P_{n-1} \to \cdots \to P_0$, qui soit positif, acyclique et qui vérifie $H_0(P_*) = M$.

Un tel complexe s'appelle une résolution projective de M, et vérifie :

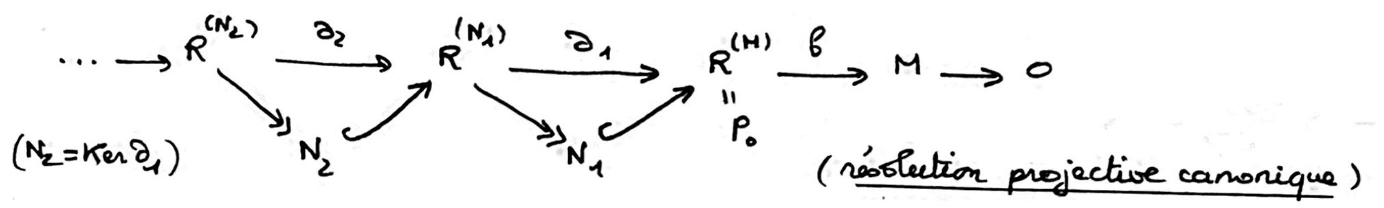
$$\cdots \longrightarrow P_n \xrightarrow{\partial_n} P_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \simeq H_0(P_*) \longrightarrow 0$$

(+) Le R-module P est dit projectif si pour tout morphisme $A \xrightarrow{g} B \to 0$ et pour tout $f : P \to B$, il existe un morphisme $h : P \to A$ tel que $g \circ h = f$

(*) cf. Godement, Théorie des faisceaux, 5.2 p 93 et 1.8 p 13. F est dit additif si $\forall u, v : A \to B$, $A, B =$ R-mod. $F(u+v) = F(u) + F(v)$. Alors $F(0) = 0$ (application nulle)

On l'obtient ainsi :

On a d'abord une surjection $\begin{array}{l} R^{(M)} \xrightarrow{f} M \to 0 \\ e_x \longmapsto x \end{array}$ où $R^{(M)}$ est un R-module libre, donc projectif. Soit $N_1 \doteq \operatorname{Ker} f$ et $P_0 \doteq R^{(M)}$. Le noyau N_1 de f est aussi le quotient d'un R-module libre, à savoir $R^{(N_1)}$. On pose $P_1 = R^{(N_1)}$ et $\partial_1 : P_1 \to P_0$ / le diagramme suiv. soit commutatif. Et ainsi de suite...

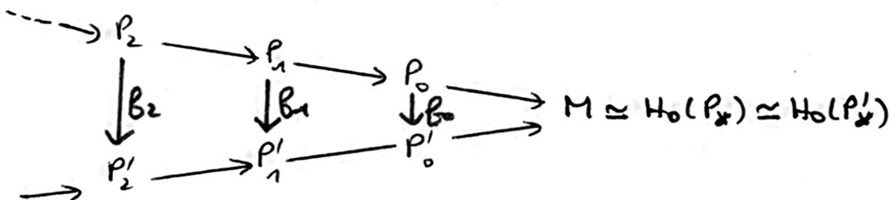


(<u>résolution projective canonique</u>)

Par construction $H_0(P_*) \simeq M$ et $H_n(P_*) = 0$ si $n > 0$, puisque si $n > 0$,
$H_n(P_*) = \operatorname{Ker}\partial_n / \operatorname{Im}\partial_{n+1} = \operatorname{Ker}\partial_n / N_{n+1} = 0$ ($N_{n+1} = \operatorname{Ker}\partial_n$ par construction)

On prendra alors : $\boxed{L_i F(M) = H_i(F(P_*))}$ (*)

Il faut vérifier que cette définition est indépendante de la résolution projective de M : Si P'_* est une autre résolution projective de M, le lemme (cf. L14) montre l'existence d'un morphisme de chaîne $f = (f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ unique à homotopie de chaînes près de P_* dans P'_* tel que $H_0(f) = id_M : H_0(P_*) \to H_0(P'_*)$ (où $M \simeq H_0(P_*) \simeq H_0(P'_*)$)



En fait, le m̂ argument montre que $f : P_* \to P'_*$ est une équivalence de chaînes, $F(f) : F(P_*) \to F(P'_*)$ aussi d'où l'isomorphisme entre les groupes d'homologie $H_n(F(P_*)) \simeq H_n(F(P'_*))$

[(*) l'additivité du foncteur F permet d'affirmer que $\cdots \to F(P_n) \xrightarrow{F(\partial_n)} F(P_{n-1}) \to \cdots \to F(P_1) \xrightarrow{F(\partial_1)} F(P_0) \to 0$ est encore une suite semi-exacte (ie un complexe), car $F(\partial_{n-1})F(\partial_n) = F(\partial_{n-1}\partial_n) = F(0) = 0$]

Montrons que L_i vérifie (1) et (2) :

(1) $L_0F = F$?

Soit M un R-module. F est un foncteur exact à droite et transforme donc la suite exacte : $P_1 \xrightarrow{\partial_1} P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$

en une suite exacte :

$$F(P_1) \xrightarrow{F(\partial_1)} F(P_0) \longrightarrow F(M) \longrightarrow 0 \qquad \text{donc } F(M) \simeq F(P_0) / F(\partial_1)(F(P_1))$$

F est un foncteur additif, donc transforme la suite semi-exacte

$$\cdots \longrightarrow P_n \xrightarrow{\partial_n} P_{n-1} \longrightarrow \cdots \xrightarrow{\partial_1} P_0 \longrightarrow 0$$

en une suite semi-exacte

$$\longrightarrow F(P_n) \longrightarrow F(P_{n-1}) \longrightarrow \cdots \longrightarrow F(P_1) \xrightarrow{F(\partial_1)} F(P_0) \longrightarrow 0$$

(car $F(\partial_{n-1}\partial_n) = F(0) = 0 = F(\partial_{n-1}).F(\partial_n)$)

Ainsi :

$$H_0(F(P_*)) \doteq F(P_0) / F(\partial_1)(F(P_1)) \simeq F(M)$$

donc $L_0F(M) = H_0(F(P_*)) \simeq F(M)$

(2) <u>lemme</u> : Soit $0 \longrightarrow A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C \longrightarrow 0$ une suite exacte de R-modules et P_* (resp. Q_*) une résolution projective de A (resp. B)

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & P_* & \longrightarrow & P_* \oplus Q_* & \longrightarrow & Q_* & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & 0 & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

Alors $P_* \oplus Q_* = \bigoplus_{n \geq 0} (P_n \oplus Q_n)$ est une résolution projective de B et la suite des résolutions $0 \longrightarrow P_* \longrightarrow P_* \oplus Q_* \longrightarrow Q_* \longrightarrow 0$ est exacte et scindée. (pour chaque $n \geq 0$)

preuve : $P_* \oplus Q_*$ est bien une suite de R-modules projectifs $P_n \oplus Q_n$, et l'on a la suite exacte

$$0 \longrightarrow P_* \xrightarrow{f} P_* \oplus Q_* \xrightarrow{g} Q_* \longrightarrow 0$$

(ie : $\forall n \in \mathbb{N}$ $0 \longrightarrow P_n \xrightarrow{f_n} P_n \oplus Q_n \xrightarrow{g_n} Q_n \longrightarrow 0$ est exacte, où f_n et g_n sont les appl. naturelles)

Il faut définir les différentielles de $P_* \oplus Q_*$:

rang 0 : Il faut définir le morphisme $\nu : P_0 \oplus Q_0 \longrightarrow B$

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & P_0 & \xrightarrow{f_0} & P_0 \oplus Q_0 & \xrightarrow{g_0} & Q_0 & \longrightarrow & 0 \\
 & & p\downarrow & \searrow^{\alpha} & \downarrow \nu & \swarrow^{\beta} & \downarrow q & & \\
0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{u} & B & \xrightarrow{v} & C & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

Q_0 est projectif, donc il existe un morphisme $\beta : Q_0 \longrightarrow B$ / $v \circ \beta = q$
On pose alors $\nu = \alpha \oplus \beta$ où $\alpha = u \circ p$.
ν est surjective par construction ($\forall b \in B \quad \exists q_0 \in Q_0 \quad q(q_0) = v(b)$
d'où $v(\beta(q_0)) = v(b) \Rightarrow \beta(q_0) - b \in \operatorname{Ker} v = \operatorname{Im} u \Rightarrow \exists !\, a \in A \quad \beta(q_0) - b = u(a)$
d'où $b = \beta(q_0) - u(a) = \beta(q_0) - u \circ p(p_0)$ où $p_0 \in P_0$. Finalement, on obtient bien $b = \nu(q_0, -p_0)$)

rang $n \geq 1$: On fait le même travail en complétant le diagramme :

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & P_n & \xrightarrow{f_n} & P_n \oplus Q_n & \xrightarrow{g_n} & Q_n & \longrightarrow & 0 \\
 & & \partial_n\downarrow & \searrow^{\alpha_n} & \downarrow \partial_n & \swarrow^{\beta_n} & \downarrow \partial_n & & \\
0 & \longrightarrow & Z_{n-1}(P_*) & \xrightarrow{f_{n-1}} & Z_{n-1}(P_* \oplus Q_*) & \xrightarrow{g_{n-1}} & Z_{n-1}(Q_*) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & \underbrace{0}_{(*)(\text{si } n>1)} & & 0 & & \underbrace{0}_{(*)(\text{si } n>1)} & &
\end{array}$$

(NB : si $n = 1$
$Z_0(P_*) = P_0$ et $Z_0(Q_*) = Q_0$)

(*) $\partial_n : P_n \rightarrow Z_{n-1}(P_*)$ est surjective car P_* (et Q_*) sont des résolutions projectives de A (de B), donc des complexes acycliques (ie, la suite semi-exacte
$\cdots \rightarrow P_n \xrightarrow{\partial_n} P_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow P_0 \rightarrow 0$ est en fait exacte pour tout $n \geq 0$, ie
$\operatorname{Im} \partial_n = \operatorname{Ker} \partial_{n-1}$ si $n > 1$ et $\operatorname{Im} \partial_1 \subset P_0$. C'est ce qui nous a permi de créer une suite exacte $\cdots \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow A \rightarrow 0$ à peu de frais, où
$A \simeq H_0(P_*)$)

On pose $\partial_n = \alpha_n \oplus \beta_n$ où $\alpha_n = f_{n-1} \circ \partial_n$ et β_n défini par : $g_{n-1} \circ \beta_n = \partial_n$.
$\partial_n : P_n \oplus Q_n \rightarrow Z_{n-1}(P_* \oplus Q_*)$ est surjective par construction, donc la suite :

$$\cdots \longrightarrow P_n \oplus Q_n \xrightarrow{\partial_n} P_{n-1} \oplus Q_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_0 \oplus Q_0 \longrightarrow 0$$

est un complexe de chaînes ($\partial_{n-1} \circ \partial_n = (\alpha_{n-1} \circ \alpha_n) \oplus (\beta_{n-1} \circ \beta_n) = 0$)
acyclique (car $\operatorname{Im} \partial_n = Z_{n-1}(P_* \oplus Q_*)$ si $n > 1$), positif, et tel que $H_0(P_* \oplus Q_*) \simeq B$. C'est donc une résolution projective de B.

La suite $0 \rightarrow P_* \rightarrow P_* \oplus Q_* \rightarrow Q_* \rightarrow 0$ est exacte et scindée (pour tout $n \geq 0$).

CQFD

On peut maintenant montrer le (2) de la déf. du i-ième foncteur dérivé à gauche : si $0 \to A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C \to 0$ est une suite exacte de R-modules, soient P_* et Q_* deux résolutions projectives de A et C respectivement. D'après le lemme précédent, $P_* \oplus Q_*$ est une résolution projective de B et on a les suites exactes (en ligne) :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & P_* & \to & P_* \oplus Q_* & \longrightarrow & Q_* & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & A & \to & B & \longrightarrow & C & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & 0 & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

Comme F est un foncteur exact à droite et comme la suite

$$0 \to P_* \to P_* \oplus Q_* \to Q_* \to 0$$

est scindée, on obtient la suite exacte :

$$0 \to F(P_*) \to F(P_* \oplus Q_*) \to F(Q_*) \to 0 \qquad (+)$$

(en effet, $0 \to A \overset{r}{\underset{u}{\leftrightarrows}} B \to C \to 0$ est scindée ssi $\exists r : B \to A \,/\, r \circ u = id_A$ donc $F(A) \xrightarrow{F(u)} F(B) \xrightarrow{F(v)} F(C) \to 0$ et $F(r)F(u) = F(id_A) = id_{F(A)}$ donc $F(u)$ est injective.)

La suite exacte (+) donne une suite exacte d'homologie longue, ie puisque $L_iF(M) = H_i(F(P_*))$: $\dots \to L_2F(C) \xrightarrow{\partial_2} L_1F(A) \to L_1F(B) \to L_1F(C) \xrightarrow{\partial_1} F(A) \to F(B) \to F(C) \to 0$

CQFD

<u>Définition</u> : $L_i(\ \otimes_R N) = Tor_i^R(\ ,N)$ est le <u>i-ième foncteur de torsion</u> de N.

On note $Tor_1^{\mathbb{Z}}(M,N) = Tor(M,N)$ et $\otimes_{\mathbb{Z}} = \otimes$.

<u>Résumé</u> : Soit M et N 2 R-modules. Comment a-t'on défini $Tor_n^R(M,N)$?

1) On prend une résolution projective $P_* : \dots \to P_n \xrightarrow{\partial_n} P_{n-1} \to \dots \to P_0 \to 0$ de M (ie un complexe de chaînes positif, acyclique et tel que $H_0(P_0) \simeq M$, et projectif)

2) On obtient un autre complexe de chaînes en tensorisant avec N :

$$P_* \otimes_R N \ : \ \dots \longrightarrow P_n \otimes_R N \xrightarrow{\partial_n \otimes id_N} P_{n-1} \otimes_R N \longrightarrow \dots \xrightarrow{\partial_1 \otimes id_N} P_0 \otimes_R N \longrightarrow 0$$

3) On calcule l'homologie de ce complexe :

$$\boxed{Tor_n^R(M,N) \doteq H_n(P_* \otimes N)}$$

Proposition 1 : $\forall M, N$ R-modules,

(1) $Tor_n^R(M,N) = Tor_n^R(N,M)$
(2) Si P est un R-module projectif, alors $Tor_n^R(P,N) = 0 \quad \forall n \geq 1$
(3) Si $0 \to A \to B \to C \to 0$ est une suite exacte de R-modules, on a la suite longue des Tor :
$$\cdots \to Tor_1(B,N) \to Tor_1(C,N) \xrightarrow{\partial_1} A \otimes N \to B \otimes N \to C \otimes N \to 0$$
(4) $Tor_0^R(M,N) = M \otimes_R N$

NB : N = R-module libre ⇒ R-module projectif

preuve :
(1) sera montré plus tard
(2) provient du fait qu'un module projectif P possède une résolution projective évidente : $0 \to P \xrightarrow{id} P \to 0$

donc $P_* : \cdots \to 0 \to 0 \to P \to 0$

En tensorisant avec N :
$$P_* \otimes_R N : \quad \to 0 \to \cdots \to 0 \to P \otimes_R N \to 0$$
d'où $\begin{cases} Tor_0^R(P, N) = P \otimes_R N \\ Tor_n^R(P, N) = H_n(P_* \otimes_R N) = 0 \text{ si } n \geq 1. \end{cases}$

(3) et (4) proviennent des 2 propriétés fondamentales d'un foncteur dérivé L_iF (cf L18) et de la définition $Tor_n^R(\ ,N) = L_i(\ \otimes_R N)$.
CQFD

<u>Calcul de $Tor_n^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, N)$</u>

$\mathbb{Z}$ est un $\mathbb{Z}$-module libre, de sorte que nous avons une résolution libre évidente de $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ (c'est vrai pour R/mR si R est un anneau principal) :
$$0 \to \underset{P_1}{\mathbb{Z}} \xrightarrow{\times m} \underset{P_0}{\mathbb{Z}} \to \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \to 0$$

$Tor_n^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, N)$ s'obtient en calculant le n-ième groupe d'homologie du complexe :
$$0 \to \underset{\overset{\cong}{N}}{\mathbb{Z} \otimes N} \xrightarrow{\times m} \underset{\overset{\cong}{N}}{\mathbb{Z} \otimes N} \to 0$$

donc * $H_0(P_* \otimes N) \simeq N/mN \Rightarrow Tor_0(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, N) = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} N \simeq N/mN$

* $Tor_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, N) = H_1(P_* \otimes N) = (N)_m \doteq \{x \in N \mid mx = 0\}$ = ensemble des éléments de m-torsion dans N.

* $Tor_n^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, N) = 0$ si $n \geq 2$.

On vient de montrer que :

> **Proposition 2 :** Si N est un $\mathbb{Z}$-module, et $m \in \mathbb{Z}$,
> $$\mathrm{Tor}\left(\mathbb{Z}/_{m\mathbb{Z}}, N\right) = (N)_m \doteq \{x \in N \ / \ mx = 0\}$$
> $$\mathrm{Tor}^{\mathbb{Z}}_n\left(\mathbb{Z}/_{m\mathbb{Z}}, N\right) = 0 \quad \text{si } n \geq 2$$
> En particulier, $\mathrm{Tor}\left(\mathbb{Z}/_{m\mathbb{Z}}, \mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}\right) = \left\{\dot{0}, \dot{\frac{n}{d}}, \dots, \dot{\frac{(d-1)n}{d}}\right\} \simeq \mathbb{Z}/_{d\mathbb{Z}}$ où $d = \Delta(m,n)$ est le pgcd de m et n.

3°/ Théorème des coefficients universels en homologie

Il s'agit de comprendre le rôle de l'anneau des coefficients R dans la construction de l'homologie, et de montrer que l'homologie à coefficients dans $\mathbb{Z}$ contient déjà toute l'information concernant l'homologie à coefficients dans un anneau quelconque R.

Si X est un e.t. et si R est un anneau commutatif, on sait construire :

$$\begin{cases} H_*(X;\mathbb{Z}) = H_*(C_*(X;\mathbb{Z})) \quad \text{où } C_n(X;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^{(S_n(X))} \\ H_*(X;R) = H_*(C_*(X;R)) \quad \text{où } C_n(X;R) = R^{(S_n(X))} \end{cases}$$

et d'après le IV 1°/ p L17 :

$$C_n(X;R) = R^{(S_n(X))} = \mathbb{Z}^{(S_n(X))} \otimes_{\mathbb{Z}} R = C_n(X;\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} R$$

On peut raisonablement se demander si $H_n(X;\mathbb{Z}) \otimes R$ est égal à $H_n(X;R)$. C'est faux en général, mais on a :

> **Théorème des coefficients universels :**
> Soient X un e.t. et R un groupe abélien (ie un $\mathbb{Z}$-module)*. On a une suite exacte scindée pour tout $q \geq 1$:
> $$0 \to H_q(X;\mathbb{Z}) \otimes R \to H_q(X;R) \to \mathrm{Tor}(H_{q-1}(X;\mathbb{Z}), R) \to 0 \qquad (1)$$
> Cette suite exacte est naturelle en ce sens :
> Si $f : X \to Y$ est continue, le diagramme suivant est commutatif :
> $$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & H_q(X;\mathbb{Z}) \otimes R & \to & H_q(X;R) & \to & \mathrm{Tor}(H_{q-1}(X;\mathbb{Z}), R) & \to & 0 \\ & & \downarrow H_q(f) \otimes id_R & & \downarrow H_q(f) & & \downarrow \mathrm{Tor}(H_{q-1}(f), R) & & \\ 0 & \to & H_q(Y;\mathbb{Z}) \otimes R & \to & H_q(Y;R) & \to & \mathrm{Tor}(H_{q-1}(Y;\mathbb{Z}), R) & \to & 0 \end{array}$$
> (Cependant, la suite (1) n'est pas scindée de façon naturelle !)

(*) on peut remplacer $\mathbb{Z}$ par un anneau PID (ie un anneau principal, commutatif, comme $\mathbb{Z}$))

preuve :

$C_q = C_q(X;\mathbb{Z})$
$B_q = B_q(X;\mathbb{Z})$
$Z_q = Z_q(X;\mathbb{Z})$
$Z_.$ = complexe de chaînes $\{Z_q\}_{q\in\mathbb{N}}$ de différentielle nulle. Son homologie est le complexe lui-même.
$B_.$ = complexe $\{B_{q-1}\}_{q\in\mathbb{N}}$ de différentielle nulle

La suite exacte $0 \to Z_q \hookrightarrow C_q \xrightarrow{\partial} B_{q-1} \to 0$ donne une suite exacte de morphismes de chaînes :

(a) $$0 \to Z_. \to C_. \xrightarrow{\partial} B_. \to 0$$

puisque tous les morphismes commutent avec les différentielles :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & Z_q & \hookrightarrow & C_q & \xrightarrow{\partial} & B_{q-1} & \to & 0 \\ & & \downarrow 0 & & \downarrow \partial & & \downarrow 0 & & \\ 0 & \to & Z_{q-1} & \hookrightarrow & C_{q-1} & \xrightarrow{\partial} & B_{q-2} & \to & 0 \end{array}$$

$B_q \subset Z_q \subset C_q$ et C_q libre, donc B_q et Z_q sont libres et $Z_.$, $C_.$, $B_.$ sont des complexes de chaînes libres. La suite exacte de Torsion associée à (a) donne, compte tenu du fait que B_q libre $\Rightarrow \mathrm{Tor}(B_q, R) = 0$:

(b) $$0 \to Z_.\otimes R \to C_.\otimes R \xrightarrow{\partial\otimes id_R} B_.\otimes R \to 0$$

(On peut d'ailleurs obtenir (b) en constatant que, comme $B_.$ est libre, il existe un morphisme réciproque $0 \to Z_. \to C_. \leftrightarrows B_. \to 0$. La suite est donc scindée, et le foncteur $\otimes R$ est exact à droite !)

La suite exacte longue d'homologie associé à la suite exacte de complexes (b) donne alors :

(c) $$\dots \to B_q\otimes R \xrightarrow{\partial} Z_q\otimes R \to H_q(X;R) \to B_{q-1}\otimes R \to Z_{q-1}\otimes R \to \dots$$

puisque $H_q(Z_.\otimes R) = Z_q\otimes R$, l'opérateur bord étant trivial dans $Z_.$
(idem pour $B_.$, $H_q(B_.\otimes R) = B_{q-1}\otimes R$)

(NB : En fait, ∂ est l'inclusion : $\partial = \gamma_q \otimes id_R$ où $\gamma_q : B_q \hookrightarrow Z_q$. On le voit en se rappelant la définition de ∂

Si $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ $\qquad \partial : H_q(C) \to H_{q-1}(A)$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \dot{z} \mapsto \dot{u}$

où $\begin{cases} g(b) = \dot{z} \\ \partial b = f(u) \end{cases}$

Ici $\quad B_q\otimes R = H_{q+1}(B_.\otimes R) \xrightarrow{\partial} Z_q\otimes R = H_q(Z_.\otimes R)$
$\quad z\otimes r = [z\otimes r] \longmapsto \gamma_q(z)\otimes r$ (appliquer la définition à (b)))

D'autre part, la suite exacte

$$0 \to B_q \xrightarrow{\gamma_q} Z_q \longrightarrow H_q \longrightarrow 0$$

donne la suite exacte de Torsion :

$$(d) \quad 0 = \mathrm{Tor}(Z_q, R) \to \mathrm{Tor}(H_q, R) \to B_q \otimes R \xrightarrow{\gamma_q \otimes id_R} Z_q \otimes R \to H_q \otimes R \to 0$$

donc $\begin{cases} \mathrm{Ker}\, \gamma_q \otimes id_R = \mathrm{Tor}(H_q, R) \\ \mathrm{Coker}\, \gamma_q \otimes id_R = H_q \otimes R \end{cases}$ (e)

Il suffit alors d'intercaler (e) dans (c) :

$$\cdots \to B_q \otimes R \xrightarrow{\gamma_q \otimes id_R} Z_q \otimes R \longrightarrow H_q(X;R) \longrightarrow B_{q-1} \otimes R \xrightarrow{\gamma_{q-1} \otimes id_R} Z_{q-1} \otimes R \quad (c)$$

(diagramme : $Z_q \otimes R \to H_q \otimes R \to H_q(X;R)$; $H_q(X;R) \to \mathrm{Tor}(H_{q-1}, R) \to B_{q-1} \otimes R$; $0 \to H_q \otimes R \to 0$; $0 \to \mathrm{Tor}(H_{q-1}, R) \to 0$; $z \otimes r \mapsto [z \otimes r]$, $z \otimes r \mapsto [z] \otimes r \mapsto [z \otimes r]$)

(e) justifie les flèches bleues. Il suffit de mettre les flèches rouges bout à bout pour obtenir la suite exacte cherchée :

$$(1) \quad 0 \to H_q \otimes R \longrightarrow H_q(X;R) \longrightarrow \mathrm{Tor}(H_{q-1}, R) \to 0$$

(C'est un phénomène général, facile à vérifier :

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D \xrightarrow{\ell} E$$

(diagramme : $B \to \mathrm{Coker} f \xrightarrow{\tilde g} C$; $C \xrightarrow{\tilde h} \mathrm{Ker}\,\ell \to D$; $0 \to \mathrm{Coker} f \to 0$; $0 \to \mathrm{Ker}\,\ell \to 0$)

$\mathrm{Coker} f = B/_{\mathrm{Im} f} \simeq B/_{\mathrm{Ker} g}$ donc $\tilde g$ est la factorisation canonique de g, donc injective.
Ensuite : $h : C \to D$
$\tilde h : C \to \mathrm{Im}\, h = \mathrm{Ker}\,\ell$ est égale à h restreinte à l'arrivée. $\tilde h$ est surjective par construction.

Enfin, $\begin{cases} \mathrm{Im}\,\tilde g = \mathrm{Im}\, g = \mathrm{Ker}\, h \\ \mathrm{Ker}\,\tilde h = \mathrm{Ker}\, h \end{cases}$ d'où $\mathrm{Im}\,\tilde g = \mathrm{Ker}\,\tilde h$ par construction)

<u>La suite exacte (1) est scindée</u> ? oui, car la suite (b) est scindée

$$(b) \quad 0 \to Z_\cdot \otimes R \to C_\cdot \otimes R \overset{u}{\rightleftarrows} B_\cdot \otimes R \to 0$$

et l'homomorphisme u se reporte sur (c) et (1).

CQFD

Application : Calcul de $H_n(X ; \mathbb{Z}/q^\delta\mathbb{Z})$ où $q \in \mathcal{P}$

Le théorème des coefficients universels donne :

$$(1) \qquad H_n(X, \mathbb{Z}/q^\delta\mathbb{Z}) = \left(H_n(X;\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}/q^\delta\mathbb{Z}\right) \oplus \mathrm{Tor}\left(H_{n-1}(X;\mathbb{Z}), \mathbb{Z}/q^\delta\mathbb{Z}\right)$$

$H_n(X, \mathbb{Z})$ est de type fini, donc s'écrit de façon unique sous la forme :

$$H_n(X;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^{b_n} \oplus \left(\bigoplus_{p \in \mathcal{P}} \bigoplus_{i=1}^{n_p} \mathbb{Z}/p^{r_i}\mathbb{Z} \right)$$

où $0 \leq r_1 \leq \dots \leq r_{n_p}$ et $r_{n_p} = 0$ presque partout.
b_n est le rang de $H_n(X;\mathbb{Z})$ et s'appelle le n-ième nombre de Betti de X
et $\bigoplus_{p\in\mathcal{P}} \bigoplus_{i=1}^{n_p} \mathbb{Z}/p^{r_i}\mathbb{Z}$ désigne le groupe (fini) de torsion de $H_n(X;\mathbb{Z})$

La formule (1) s'éclaircit à la lumière des remarques suivantes :

1) $(A \oplus B) \otimes R = (A \otimes R) \oplus (B \otimes R)$

$\mathrm{Tor}(A \oplus B, R) = \mathrm{Tor}(A,R) \oplus \mathrm{Tor}(B,R)$

2) D'après le 1°,
$$\begin{cases} \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/q^\delta\mathbb{Z} = \mathbb{Z}/q^\delta\mathbb{Z} \\ \mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/q^\delta\mathbb{Z} = \begin{cases} 0 & \text{si } p \neq q \\ \mathbb{Z}/p^{\inf(i,\delta)}\mathbb{Z} & \text{si } p = q \end{cases} \end{cases}$$

3) D'après le 2° Pro. 2 :

$\mathrm{Tor}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/q^\delta\mathbb{Z}) = 0$ car $\mathbb{Z}$ libre et $\mathbb{Z}/q^\delta\mathbb{Z}$ projectif

$$\mathrm{Tor}(\mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/q^\delta\mathbb{Z}) = \begin{cases} 0 & \text{si } p \neq q \\ \mathbb{Z}/p^{\inf(i,\delta)}\mathbb{Z} & \text{si } p = q \end{cases}$$

Donc :

$$H_n(X, \mathbb{Z}/q^\delta\mathbb{Z}) = \underbrace{\mathbb{Z}/q^\delta\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}/q^\delta\mathbb{Z}}_{b_n \text{ fois}} \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^{n_q} \mathbb{Z}/q^{\inf(r_i,\delta)}\mathbb{Z} \right) \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^{n_q} \mathbb{Z}/q^{\inf(r_i,\delta)}\mathbb{Z} \right)$$

$$\boxed{H_n(X, \mathbb{Z}/q^\delta\mathbb{Z}) = \left(\mathbb{Z}/q^\delta\mathbb{Z}\right)^{b_n} \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^{n_q} \left(\mathbb{Z}/q^{\inf(r_i,\delta)}\mathbb{Z}\right)^2 \right)}$$

Calculons $H_n(S^k, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$: d'après la formule (1) et comme $\mathrm{Tor}(H_{n-1}(S^k;\mathbb{Z}), \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = 0$ dans tous les cas, on obtient :

$$H_n(S^k, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = H_n(S^k, \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq 0 \text{ et } k \\ \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} & \text{si } n = 0 \text{ ou } k \end{cases}$$

Calculons $H_n(\mathbb{P}^2\mathbb{R}; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$: Il faut d'abord savoir calculer l'homologie de $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$ à coefficients entiers... Notons $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}^2\mathbb{R}$.

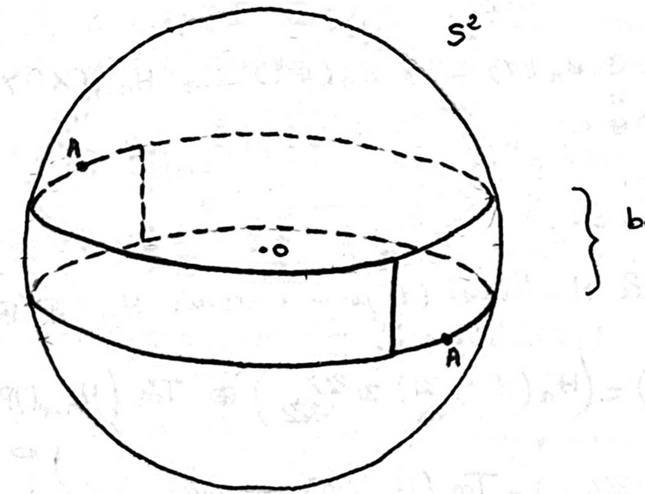
$\mathbb{P}^2$ est l'ensemble des droites vectorielles de $\mathbb{R}^3$, et peut être donné par le revêtement à 2 feuillets

$$S^2 \longrightarrow \mathbb{P}^2$$
$$\vec{u} \longmapsto \mathbb{R}\vec{u}$$

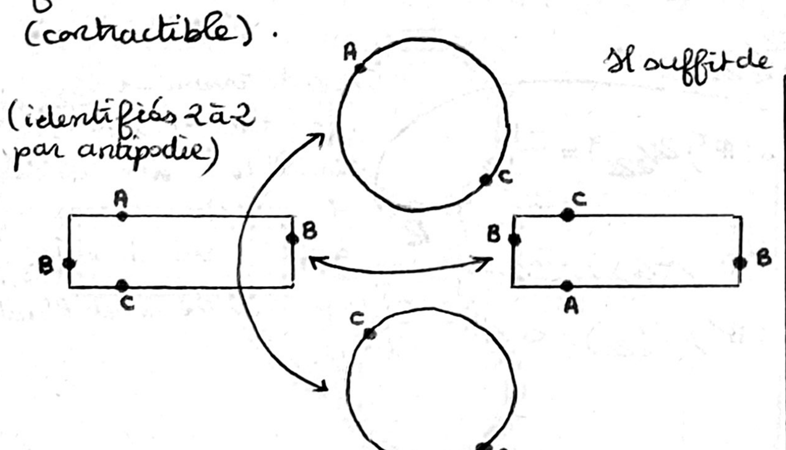
On écrit $\mathbb{P}^2 = S^2/\{\pm 1\}$

où $\begin{cases} 1 = id_{S^2} \\ -1 = -id_{S^2} = \text{antipodie}. \end{cases}$

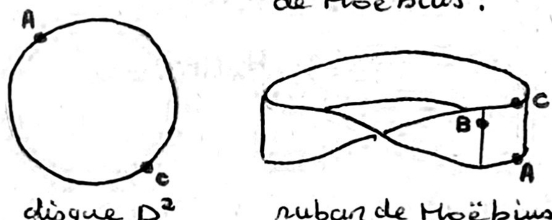
L'écriture $\mathbb{P}^2 = S^2/\{\pm 1\}$ nous donne une façon imagée de construire le plan projectif $\mathbb{P}^2$. On considère la sphère S^2 dans $\mathbb{R}^3$. On fixe une bande équatoriale de S^2 et on envisage le découpage suivant :



On obtient 4 morceaux dont on identifie certains points par antipodie : on obtient finalement $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$ comme réunion d'un ruban de Moebius et d'un disque D^2 (contractible).



Il suffit de prendre un disque et 1 rectangle, mais antipodie identifie encore 2 côtés opposés de ce rectangle pour donner un ruban de Moëbius ; on recolle enfin le bord du disque sur le bord du ruban de Moëbius :



L'homologie de $\mathbb{P}^2$ peut se calculer en utilisant la suite de Mayer-Vietoris et les ensembles $\begin{cases} X = D^2 & \text{(contractible)} \\ Y = \text{ruban de Moebius} \end{cases}$

Y se rétracte sur le cercle S^1

S^1

Y

$$X \cap Y = \partial X \simeq S^1$$

$X \sim *$ ($\sim$ = se rétracte en, par déformation-rétraction)

$Y \sim S^1$

$$\begin{array}{ccccc} \partial Y & \hookrightarrow & Y & \xrightarrow{\sim} & S^1 \\ \| & & & \nearrow & \\ S^1 & & \times 2 & & \end{array}$$

$\times 2$ (on fait 2 tours)

$$\underset{0}{\underbrace{H_2(X) \oplus H_2(Y)}} \longrightarrow H_2(\mathbb{P}_2) \xrightarrow{\partial} \underset{\mathbb{Z}}{\underbrace{H_1(X \cap Y)}} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow H_1(X) \oplus H_1(Y) \longrightarrow H_1(\mathbb{P}_2) \longrightarrow H_0(X \cap Y) \xrightarrow{0 \times (\times 2)} H_0(X) \oplus H_0(Y) \longrightarrow H_0(\mathbb{P}_2) \longrightarrow 0$$

d'où $\left\| \begin{array}{l} H_0(\mathbb{P}^2) = \mathbb{Z} \\ H_1(\mathbb{P}^2) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \end{array} \right.$

Si $n \geq 2$ $\quad \underset{0 \oplus 0}{\underbrace{H_n(X) \oplus H_n(Y)}} \longrightarrow H_n(\mathbb{P}^2) \longrightarrow \underset{0}{\underbrace{H_{n-1}(X \cap Y)}}$

donc $\| H_n(\mathbb{P}^2) = 0$.

Cela étant, il est facile d'utiliser (1) pour obtenir $H_n(\mathbb{P}^2\mathbb{R}\,;\,\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$:

$$H_n(\mathbb{P}^2;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \left(H_n(\mathbb{P}^2;\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\right) \oplus \mathrm{Tor}\left(H_{n-1}(\mathbb{P}^2;\mathbb{Z}),\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\right)$$

* Si $n \geq 2$ $\quad H_n(\mathbb{P}^2;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathrm{Tor}(H_{n-1}(\mathbb{P}^2;\mathbb{Z}),\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \begin{cases} 0 & \text{si } n > 2 \\ \mathrm{Tor}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z},\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{si } n = 2 \end{cases}$

* $H_1(\mathbb{P}^2;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

* $H_0(\mathbb{P}^2;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

<u>On remarque</u> :

	$H_0(\mathbb{P}^2) = \mathbb{Z}$	$H_0(\mathbb{P}^2;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
	$H_1(\mathbb{P}^2) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$H_1(\mathbb{P}^2;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
	$H_2(\mathbb{P}^2) = 0$	$H_2(\mathbb{P}^2;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
$(n \geq 3)$	$H_n(\mathbb{P}^2) = 0$	$H_n(\mathbb{P}^2;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = 0$

le terme de torsion en $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ reproduit (toujours) 2 termes de torsion de degré 1 et 2 dans l'homologie à coefficient dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. L'un provient de $\otimes$ et l'autre de Tor.

V Cohomologie

1°/ Définitions

La notion de cohomologie est duale de celle d'homologie. Soit X un espace topologique. On a construit le complexe de chaînes singulières $C_\cdot(X) = \mathbb{Z}^{(S_\cdot(X))}$. Si M est un $\mathbb{Z}$-module, une <u>n-cochaîne de X à valeurs dans M</u> est une application $\mathbb{Z}$-linéaire de l'ensemble des n-chaînes $C_n(X)$ dans M. On note $C^\cdot(X;M)$ l'ensemble des cochaînes de X à valeurs dans M.
Ainsi :

$$C^\cdot(X;M) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(C_\cdot(X), M)$$

où $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(C_\cdot(X), M)$ désigne le module des homomorphismes de $\mathbb{Z}$-modules de $C_\cdot(X)$ vers M.
Comme $C_\cdot(X) = \mathbb{Z}^{(S_\cdot(X))}$, $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}^{(S_\cdot(X))}, M) = M^{S_\cdot(X)}$ = ensemble de toutes les applications de $S_\cdot(X)$ dans M.
Cela signifie simplement que pour se donner une application $\mathbb{Z}$-linéaire de $C_\cdot(X)$ dans M, il suffit de se donner une application (quelconque) de $S_\cdot(X)$ dans M, ie définie sur la base $S_\cdot(X)$ de $C_\cdot(X) = \mathbb{Z}^{(S_\cdot(X))}$, et complétée par linéarité.

NB : Si S est un ensemble, $\mathbb{Z}^S$ n'est pas libre si $\# S \geq +\infty$ (difficile).

Notons $C_n(X) = C_n$. L'existence d'une différentielle $C_n \xrightarrow{d} C_{n-1}$ permet de définir, par dualité, une différentielle de degré +1 cette fois-ci :

$$\begin{aligned} C^{n-1} = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(C_{n-1}, M) &\xrightarrow{\partial} C^n = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(C_n, M) \\ c &\longmapsto \partial c \;/\; \partial c(\Delta) = (-1)^{|c|} c(d\Delta) \end{aligned}$$

où $|c|$ désigne le degré de la cochaîne c ($c \in C^n(X;M) \Leftrightarrow |c| = n$)
Il est clair que $\partial\partial = 0$.
On possède donc un complexe de cochaînes (singulières) :

$$\cdots \longrightarrow C^{n-1} \xrightarrow{\partial^{n-1}} C^n \xrightarrow{\partial^n} C^{n+1} \longrightarrow \cdots$$

<u>Définition</u> : La cohomologie singulière de X n'est autre que l'homologie de ce complexe de cochaînes :

$$H^n(X;M) = H_n(C^\cdot(X;M)) = {\mathrm{Ker}\,\partial^n}/{\mathrm{Im}\,\partial^{n-1}}$$

<u>Cohomologie d'une paire</u> :
Si (X,A) est une paire d'e.t, ie si $A \subset X$, on a la suite exacte scindée (car les $\mathbb{Z}$-modules sont tous libres) :

$$0 \longrightarrow C_\cdot(A) \hookrightarrow C_\cdot(X) \longrightarrow C_\cdot(X,A) \doteq {C_\cdot(X)}/{C_\cdot(A)} \longrightarrow 0$$

En passant au dual : (où $C^{\cdot}(X,A;M) = Hom_{\mathbb{Z}}(C_{\cdot}(X,A), M)$)

$$0 \leftarrow C^{\cdot}(A;M) \underset{\text{restriction}}{\longleftarrow} C^{\cdot}(X;M) \hookleftarrow C^{\cdot}(X,A;M) \leftarrow 0$$

$C^{\cdot}(X,A;M)$ est un sous-complexe de $C^{\cdot}(X;M)$ car il est facile de définir $\partial : C^{\cdot}(X,A;M) \longrightarrow C^{\cdot}(X,A;M)$ tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 \leftarrow & C^{\cdot}(A;M) & \overset{r}{\longleftarrow} & C^{\cdot}(X;M) & \overset{i}{\hookleftarrow} & C^{\cdot}(X,A;M) & \leftarrow 0 \\ & \uparrow \partial & & \uparrow \partial & & \uparrow \partial & \\ 0 \leftarrow & C^{\cdot}(A;M) & \overset{r}{\longleftarrow} & C^{\cdot}(X;M) & \overset{i}{\hookleftarrow} & C^{\cdot}(X,A;M) & \leftarrow 0 \end{array}$$

On prend : $\partial : C^{\cdot}(X,A;M) \longrightarrow C^{\cdot}(X,A;M)$

$$c \longmapsto \partial c$$

$c \in Hom_{\mathbb{Z}}(C_{\cdot}(X)/_{C_{\cdot}(A)}, M)$ défini $c \in Hom_{\mathbb{Z}}(C_{\cdot}(X), M)$ et $(\partial c)|_A = \partial(c|_A) = 0$
donc $\partial c \in Ker\, r = Im\, i$, $\exists\, \partial c \in C^{\cdot}(X,A;M)$ / $i(\partial c) = \partial c$

Finalement $C^{\cdot}(X,A;M) = Hom_{\mathbb{Z}}(C_{\cdot}(X,A), M)$ où $C_{\cdot}(X,A) = C_{\cdot}(X)/_{C_{\cdot}(A)}$ représente le complexe des cochaînes relatives modulo A.
Une cochaîne relative est donc une fonction $\mathbb{Z}$-linéaire sur les chaînes de X qui s'annule sur les chaînes de A.
La cohomologie de la paire (X,A) n'est autre que la cohomologie du complexe de cochaînes relatives $C^{\cdot}(X,A;M)$:

$$H^*(X,A;M) = H^*(C^{\cdot}(X,A;M))$$

On a clairement $H^*(X,\emptyset;M) = H^*(X;M)$.

On peut définir la cohomologie H^* comme étant un foncteur contravariant qui vérifie les 4 axiomes d'Eilenberg-Steenrod (calqués sur les axiomes de l'homologie) :

(A1) <u>Exactitude</u> : Si (X,A,B) est un triple d'e.t., ie si $X \supset A \supset B$, on a la suite exacte longue :

$$\cdots \leftarrow H^n(A,B;M) \leftarrow H^n(X,B;M) \leftarrow H^n(X,A;M) \overset{\partial}{\longleftarrow} H^{n-1}(A,B;M) \leftarrow \cdots$$

et si (X',A',B') est un autre triple, si $f : (X',A',B') \longrightarrow (X,A,B)$ est une application continue de triples, ie si $f : X' \longrightarrow X$, $f(A') \subset A$ et $f(B') \subset B$, alors le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots \leftarrow H^n(A,B;M) & \leftarrow & H^n(X,B;M) & \leftarrow & H^n(X,A;M) & \overset{\partial}{\longleftarrow} & H^{n-1}(A,B;M) \leftarrow \cdots \\ \downarrow H^n(f)\ \text{(abus)} & & \downarrow H^n(f) & & \downarrow H^n(f) & & \downarrow H^n(f) \\ \cdots \leftarrow H^n(A',B';M) & \leftarrow & H^n(X',B';M) & \leftarrow & H^n(X',A';M) & \overset{\partial}{\longleftarrow} & H^{n-1}(A',B';M) \leftarrow \cdots \end{array}$$

(A2) <u>Homotopie</u> : Si $f_1, f_2 : (X,A) \longrightarrow (X',A')$ sont 2 applications continues homotopes en tant que paires, alors $f_1^* = f_2^*$ où $f_1^*, f_2^* : H^*(X',A';M) \longrightarrow H^*(X,A;M)$

(A3) <u>Excision</u> : Si (X,A,U) est un triple tel que $\bar{U} \subset \mathring{A}$, alors l'application canonique $H^*(X,A;M) \xrightarrow{\sim} H^*(X \setminus U, A \setminus U; M)$ est un isomorphisme.

(A4) <u>Dimension</u> : La cohomologie du point $*$ est triviale, ie

$$\begin{cases} H^n(*;M) = 0 & \text{si } n \neq 0 \\ H^0(*;M) = M \end{cases}$$

2°) <u>Cohomologie extraordinaire</u> :

Une théorie de la cohomologie bâtie avec les seuls axiomes (A1), (A2) et (A3) s'appelle une théorie de la cohomologie extraordinaire. Citons la K-théorie, le cobordisme ...

<u>K-théorie</u> : Si $Vect_{\mathbb{R}}(X)$ désigne l'ensemble de tous les fibrés vectoriels sur X, $Vect_{\mathbb{R}}(X)$ est un monoïde pour l'opération "somme directe" $\oplus$, d'élément neutre le fibré nul 0. On symétrise ce monoïde pour obtenir $K^0_{\mathbb{R}}(X)$.
Si X est compact, on peut symétriser le monoïde $Vect_{\mathbb{R}}(X)/\sim$ où $\sim$ est la relation d'équivalence : $\xi \sim \eta \Leftrightarrow \exists\, \theta$ fibré trivial, $\theta^n = X \times \mathbb{R}^n \longrightarrow X \,/\, \xi \oplus \theta = \eta \oplus \theta$.
Si X est compact et connexe, il suffira de symétriser les fibrés constants pour obtenir $K^0_{\mathbb{R}}(X)$. $K^0_{\mathbb{R}}$ est un foncteur contravariant. Notons $K^0_{\mathbb{R}} = K^0$.
On pose ensuite $K^i(X) = K^0(S^i X^+)$ où $X^+ = X \cup \{*\}$ et $S(X)$ désigne la suspension de X, ie $SX = X \times [0,1] / X \times \{0\} \cup X \times \{1\}$.

$K^0(X,A) =$ fibration sur X en restriction triviales sur A

On peut alors vérifier (A1), (A2) et (A3). Mais on aura, avec cette construction :

$$K^i_{\mathbb{R}}(*) = \begin{cases} \mathbb{Z} & i = 0 \quad [8] \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & 1 \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & 2 \\ 0 & 3 \\ \mathbb{Z} & 4 \\ 0 & 5 \\ 0 & 6 \\ 0 & 7 \end{cases}$$

On notera, enfin, qu'il n'y a qu'une seule théorie de la cohomologie ordinaire (ie non extraordinaire) sur les polyèdres.

3°/ Foncteur extension Ext

a) Soit R un anneau commutatif, et notons $Hom_R(N,A) = Hom(N,A)$ le R-module des homomorphismes de N dans A.
Si $0 \to A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C \to 0$ est une suite exacte de R-modules, on a la suite exacte à gauche :

$$0 \to Hom(N,A) \xrightarrow{Hom(u)} Hom(N,B) \xrightarrow{Hom(v)} Hom(N,C)$$
$$f \longmapsto u \circ f \longmapsto v \circ u \circ f$$

L'injectivité de Hom(u) est triviale : $u \circ f = 0 \Rightarrow \forall n \in N \quad u(f(n)) = 0 \Rightarrow f(n) = 0$ car u injective, donc $f = 0$.
On dit que le foncteur covariant $Hom(N, .)$ est exact à gauche. C'est un foncteur additif qui commute aux sommes directes.
Si la suite exacte $0 \to A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C \to 0$ est scindée, alors la suite des Hom est exacte à droite. En effet, soit $v' : C \to B$ un inverse à droite de v. $v \circ v' = id_C$, donc $Hom(v) \circ Hom(v') = Hom(id_C) = id_{Hom(N,C)}$ donc Hom(v) est surjective.

b) Le foncteur $Hom(., N)$ est contravariant et exact à gauche :
Si $0 \to A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C \to 0$ est exacte, on a la suite exacte à gauche

$$Hom(A,N) \longleftarrow Hom(B,N) \longleftarrow Hom(C,N) \longleftarrow 0$$
$$f \circ v \circ u \longleftarrow f \circ v \longleftarrow f$$

($f \circ v = 0 \Rightarrow f \circ v(b) = 0 \ \forall b \in B \Rightarrow f = 0$ car v surjective)

c) Le foncteur Ext^n est défini à partir du foncteur $Hom(N, .)$ ou $Hom(., M)$ suivant la présentation adoptée, tout comme le foncteur torsion Tor^n était défini à l'aide du foncteur $N \otimes$.
Soient M et N 2 R-modules, et $P_\bullet \to N$ une résolution projective de N.
Le complexe de cochaînes $Hom(P_\bullet, M) = (C^\bullet, \partial)$ où $|\partial| = +1$ permet de calculer sa cohomologie :

$$H^*(C^\bullet) = Ext_R^*(N,M)$$
$$\text{ie} \quad H^n(C^\bullet) = Ext_R^n(N,M) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

On retiendra :

M, N = R-modules $P_\bullet \to N$ résolution projective de N }	$Ext_R^n(N,M) = H^n(Hom(P_\bullet, M))$

Si $\ldots \xrightarrow{d} P_2 \xrightarrow{d} P_1 \xrightarrow{d} P_0 \longrightarrow 0$ est une résolution projective de N (ie un complexe de chaînes positif acyclique projectif et tel que $H_0(P_\cdot) \simeq N$), on construit le complexe de cochaînes :

$$\ldots \xleftarrow{\partial} Hom(P_1, M) \xleftarrow{\partial} Hom(P_0, M) \longleftarrow 0$$

On a : $Ext^0_R(N,M) = H^0(Hom(P_\cdot, M)) = Ker\,\partial = Hom(P_0, M)$.

En fait :

$$\boxed{(1) \quad Ext^0_R(N,M) = Hom(N,M)}$$

Il suffit d'écrire la suite exacte : $\ldots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{d} P_0 \xrightarrow{\pi} N \longrightarrow 0$ et de passer à Hom :

$$\ldots \xleftarrow{\partial} Hom(P_1, M) \xleftarrow{\partial} Hom(P_0, M) \xleftarrow{\pi^*} Hom(N,M) \longleftarrow 0 \quad \text{(suite exacte)}$$

de sorte que l'on obtient bien :

$$Ker\,\partial = Im\,\pi^* \simeq Hom(N,M)$$

On peut introduire le foncteur Ext en utilisant une résolution injective de M, (ie un complexe de cochaînes $Q^\cdot$ positif acyclique injectif* et tel que $H^0(Q_0) \simeq M$). On pose alors $Ext^n_R(N,M) = H^n(Hom(N, Q^\cdot))$.

M, N = R-modules $M \longrightarrow Q^\cdot$ résolution injective de M }	$Ext^n_R(N,M) = H^n(Hom(N, Q^\cdot))$

<u>Propriétés</u> :

(2) <u>Si $n \geq 1$, $Ext^n_R(N,M) = 0$ dès que N est R-projectif ou dès que M est R-injectif</u>

Si N est R-projectif, $0 \to N \to N \to 0$ est une résolution projective de N,

$P_\cdot : \; 0 \longrightarrow N \longrightarrow 0$

$Hom(P_\cdot, M) : \; 0 \longleftarrow Hom(N,M) \longleftarrow 0$

$$\text{donc } Ext^n_R(N,M) = H^n(Hom(P_\cdot, M)) = \begin{cases} Hom(N,M) \text{ si } n=0 \\ 0 \text{ si } n>0 \end{cases}$$

Si M est R-injectif, $0 \to M \to M \to 0$ est une résolution injective de M,

$Q^\cdot_{\ } : \; 0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$

$Hom(N, Q^\cdot) : \; 0 \longrightarrow Hom(N,M) \longrightarrow 0$

$$\text{donc } Ext^n_R(N,M) = H^n(Hom(N, Q^\cdot)) = \begin{cases} Hom(N,M) \text{ si } n=0 \\ 0 \text{ si } n>0 \end{cases}$$

cqfd

---

* Un R-module M est dit injectif si pour toute application (R-linéaire) injective $f : A \longrightarrow B$ entre 2 R-modules A et B et pour toute application R-linéaire $g : A \longrightarrow M$ il existe un homomorphisme de R-modules $\tilde{g} : B \to M$ qui rende le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{f} & B \\ & & g \downarrow & \swarrow \tilde{g} & \\ & & M & & \end{array}$$

commutatif (on renverse les flèches de la situation projectif !)

ex : $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}/\mathbb{Z} = S^1$ sont $\mathbb{Z}$-injectifs.

ex : Les modules projectifs et injectifs coïncident sur l'anneau $R = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

(3) Si $0 \to A \to B \to C \to 0$ est une suite exacte de R-modules, la suite exacte à gauche $0 \to Hom(N,A) \to Hom(N,B) \to Hom(N,C)$ peut être complétée à droite grâce aux foncteurs Ext_R^n pour obtenir la suite exacte longue d'extension :

$$0 \to Hom(N,A) \to Hom(N,B) \to Hom(N,C) \to Ext_R^1(N,A) \to$$
$$\to Ext_R^1(N,B) \to Ext_R^1(N,C) \xrightarrow{\partial} Ext_R^2(N,A) \to \cdots$$

Il suffit d'appliquer l'axiome d'exactitude (A1) de la cohomologie et la définition de $Ext_R^n(N,M) = H^n(Hom(N,Q^{\cdot}))$. La démonstration est semblable à celle du (2) p. L19 et L20 où l'on montre l'existence de la suite exacte longue de Torsion.

<u>Calcul dans certains cas</u> ; <u>Formulaire</u>

$Ext(\mathbb{Z}, M) = 0 \quad \forall M = \mathbb{Z}$-module, car $\mathbb{Z}$ est projectif.
$Ext(M, \mathbb{Q}) = 0 \quad \forall M = \mathbb{Z}$-module, car $\mathbb{Q}$ est injectif.
$Ext(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ où $d = \Delta(m,n)$ est le pgcd de m et n
$Ext(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$

$0 \to \underset{P_1}{\mathbb{Z}} \xrightarrow{\times m} \underset{P_0}{\mathbb{Z}} \to \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \to 0$ est une résolution projective de $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$,

d'où : $Hom(P_\cdot, \mathbb{Z})$: $0 \leftarrow \underbrace{Hom(P_1, \mathbb{Z})}_{=\mathbb{Z}} \xleftarrow{\times m} \underbrace{Hom(P_0, \mathbb{Z})}_{=\mathbb{Z}}$

Ainsi : $Ext^0(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = Hom(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = 0$

$$Ext(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = H^1(Hom(P_\cdot, \mathbb{Z})) = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$$

En gardant la même résolution projective de $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, on obtient :

$$Hom(P_\cdot, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) : \quad 0 \leftarrow \underset{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}{\underset{\parallel}{Hom(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})}} \xleftarrow{\times m} \underset{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}{\underset{\parallel}{Hom(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})}}$$

d'où $Ext^0(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = Hom(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = \frac{n}{d}\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ où $d = \Delta(m,n)$

$Ext^1(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \simeq \dfrac{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}{m(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})} \simeq \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ (où $d = \Delta(m,n)$, eu égard à la suite exacte : $0 \to \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \xrightarrow{\times m} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} \to 0$)

CQFD

4°/ Théorème des coefficients universels en cohomologie :

L'application :

$$\gamma : H^n(X;M) \longrightarrow Hom(H_n(X);M)$$
$$[c] \longmapsto ([z] \longrightarrow c(z))$$

est bien définie puisque ne dépend ni de $c \in [c]$, ni de $z \in [z]$. En effet, si $c + \partial c' \in [c]$ et $z + dx \in [z]$, on a :

$$(c+\partial c')(z+dx) = c(z+dx) + \partial c'(z+dx)$$
$$= cz \pm \underbrace{(\partial c)}_{=0} x \pm c'(\underbrace{dz}_{=0}) \pm c'(\underbrace{ddx}_{=0}) = cz.$$

(car c = cocycle) (car z = cycle)

Le théorème suivant montre que l'on peut déduire $H^*(X;M)$ de $H_*(X)$. Ainsi, calculer un groupe de cohomologie à coefficients dans M revient à calculer un groupe d'homologie à coefficients dans $\mathbb{Z}$.
La démonstration omise de ce théorème est analogue à celle du Th. des coeff. univ. en homologie.

> **Théorème** : On a la suite exacte naturelle en X et M :
>
> $$0 \rightarrow Ext^1_{\mathbb{Z}}(H_{n-1}(X), M) \longrightarrow H^n(X;M) \xrightarrow{\gamma} Hom(H_n(X);M) \longrightarrow 0$$
>
> Cette suite est scindée (pas naturellement)

exercice : Calculer $H^*(\mathbb{P}^2\mathbb{R})$ en utilisant ce théorème, et à partir de $H_*(\mathbb{P}^2\mathbb{R})$ (donné en L23)

On a : $$0 \rightarrow \underbrace{Ext^1_{\mathbb{Z}}(H_{n-1}(\mathbb{P}^2\mathbb{R}), \mathbb{Z})}_{=0} \rightarrow H^n(\mathbb{P}^2\mathbb{R}) \longrightarrow Hom(H_n(\mathbb{P}^2\mathbb{R});\mathbb{Z}) \rightarrow 0$$

donc $H^n(\mathbb{P}^2\mathbb{R}) \simeq Hom(H_n(\mathbb{P}^2\mathbb{R});\mathbb{Z})$ où $H_n(\mathbb{P}^2\mathbb{R}) = \begin{cases} \mathbb{Z} \text{ si } n=0 \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \text{ si } n=1 \\ 0 \text{ si } n\neq 0,1 \end{cases}$

Finalement :

$$H^n(\mathbb{P}^2\mathbb{R}) = \begin{cases} Hom(\mathbb{Z},\mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \text{ si } n=0 \\ Hom(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = 0 \text{ si } n=1 \\ 0 \text{ si } n\neq 0,1. \end{cases}$$

VI Théorème de Künneth.

1°/ Produit tensoriel de 2 complexes.

Si $C.$ et $D.$ sont 2 complexes de chaînes (on notera indifféremment $C. = C$ et $D. = D$), on définit le complexe "produit tensoriel de C et D"

$$(C \otimes D\ ,\ \partial)$$

en posant :

$$\begin{cases} (C \otimes D)_n = \sum_{p+q=n} C_p \otimes D_q \\ \partial(x \otimes y) = \partial x \otimes y + (-1)^{|x|} x \otimes \partial y \end{cases}$$

où $|x|$ = degré de x, ∂ étant complété par linéarité.

On peut définir $C^{\cdot} \otimes D^{\cdot}$ de la même manière pour des complexes de cochaines. Si C et D sont positives, ie $C_n = D_n = 0$ si $n<0$, la somme directe $\sum_{p+q=n} C_p \otimes D_q$ est finie.

Vérifions que ∂ est bien une différentielle, ie $\partial\partial = 0$:

$$\partial(\partial(x \otimes y)) = \underbrace{\partial^2 x}_{=0} \otimes y + (-1)^{|x|-1} \partial x \otimes \partial y + (-1)^{|x|} \partial x \otimes \partial y + (-1)^{2|x|} x \otimes \underbrace{\partial^2 y}_{=0}$$

$$\partial^2(x \otimes y) = 0$$

On peut définir le <u>morphisme de Künneth</u> :

$$\begin{aligned} K_{pq} \ :\ H_p(C) \otimes H_q(D) &\longrightarrow H_{p+q}(C \otimes D) \\ [z] \otimes [z'] &\longmapsto [z \otimes z'] \end{aligned}$$

puisque d'après la définition de la différentielle du complexe $C \otimes D$, on a :

$\forall (z, z') \in Z_p C \times Z_q D \qquad z' \otimes z'' \in Z_{p+q}(C \otimes D)$

et $\forall \partial u \in B_q D \quad z \otimes \partial u = (-1)^{|z|} \partial(z \otimes u) \in B_{p+q}(C \otimes D)$

$\forall \partial v \in B_p C \quad \partial v \otimes z' = 0$

Le morphisme $\quad K = \sum_{p+q=n} K_{pq} \ :\ \sum H_p(C) \otimes H_q(D) \longrightarrow H_n(C \otimes D)$

s'appelle le <u>produit d'homologie</u> des complexes C et D.

<u>Remarque</u> :

Si G est un R-module et si D est le complexe $\begin{cases} D_0 = G \\ D_n = 0 \text{ si } n \neq 0 \end{cases}$ muni de la différentielle triviale $\partial = 0$, alors :

$$C \otimes D = C \otimes G \qquad \text{ie } (C \otimes D)_n = C_n \otimes G \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

et $\quad K \ :\ H_n(C) \otimes G \longrightarrow H_n(C \otimes G)$ $\quad$ puisque $\begin{cases} H_0(D) = G \\ H_n(D) = 0 \text{ si } n \neq 0. \end{cases}$

$\qquad\qquad [z] \otimes g \longmapsto [z \otimes g]$

2°/ Produit de Torsion de 2 complexes.

Si C et D sont 2 complexes de chaînes, le complexe de torsion n'est autre que : $(\mathrm{Tor}(C,D) \ , \partial)$

où
$$\begin{cases} (\mathrm{Tor}(C,D))_n = \sum_{p+q=n} \mathrm{Tor}(C_p, D_q) \\ \partial|_{\mathrm{Tor}(C_p,D_q)} = \mathrm{Tor}(\partial_p, id_{D_q}) + (-1)^p \, \mathrm{Tor}(id_{C_p}, \partial_q) \end{cases}$$

Si C et D sont 2 complexes de chaînes, $H(C) \doteq \{H_n(C)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ est un complexe de chaînes dont le bord ∂ est trivial (ie $\partial = 0$). Alors :

$H(C) \otimes H(D)$ où $(H(C) \otimes H(D))_n = \sum_{p+q=n} H_p(C) \otimes H_q(D)$

et $\mathrm{Tor}(H(C), H(D))$ où $(\mathrm{Tor}(H(C),H(D)))_n = \sum_{p+q=n} \mathrm{Tor}(H_p(C), H_q(D))$

sont des complexes de chaînes dont les bords ∂ sont triviaux.

Avant d'aborder le théorème de Künneth, rappelons que :

<u>Définition</u> : Un R-module X est <u>plat</u> si $\mathrm{Tor}(X,Y) = 0$ pour tout R-module Y, ou, ce qui revient au même, si pour toute suite exacte de R-modules $0 \to A \to B \to C \to 0$ la suite $0 \to X\otimes A \to X \otimes B \to X \otimes C \to 0$ est encore exacte.

3°/ Lien entre $H_n(C \otimes D)$, $H_n(C)$ et $H_n(D)$.

<u>Théorème de Künneth</u>

C, D = complexes de chaînes de R-module, où R est un <u>anneau principal</u>.
C ou D est <u>libre</u>.
On a alors la suite exacte scindée :

$$0 \to \sum_{p+q=n} H_p(C) \otimes H_q(D) \xrightarrow{K} H_n(C \otimes D) \longrightarrow \sum_{p+q=n-1} \mathrm{Tor}(H_p(C), H_q(D)) \longrightarrow 0$$

(pour tout $n \in \mathbb{Z}$).

preuve : Il faut trouver Ker K et Coker K. Posons $B = \{B_n(C)\}_{n\in\mathbb{Z}}$, $Z = \{Z_n(C)\}_{n\in\mathbb{Z}}$, $B^- = \{B_{q-1}\}_{q\in\mathbb{Z}} = \{B_q^-\}_{q\in\mathbb{Z}}$.

Z et B^- sont des complexes de chaînes à bord trivial, de sorte que la suite de morphismes de chaînes

$$0 \to Z \hookrightarrow C \xrightarrow{\partial} B^- \to 0 \qquad (1)$$

soit exacte.

B^- est un complexe de chaînes libre (car B_q^- est un sous-module du module libre C_{q-1} sur l'anneau principal R), donc projectif, et la suite (1) est scindée. (cf. cah1 p21 à 49) On dispose donc de la suite exacte :

$$0 \to Z\otimes D \to C\otimes D \xrightarrow{\partial\otimes id_D} B^-\otimes D \to 0$$

qui induit une suite exacte longue d'homologie :

$$\cdots \to H_{n+1}(B^-\otimes D) \xrightarrow{\partial} H_n(Z\otimes D) \to H_n(C\otimes D) \to H_n(B^-\otimes D) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(Z\otimes D) \to \cdots \qquad (2)$$

En fait $K : \sum_{p+q=n} Z_p \otimes H_q(D) \xrightarrow{\sim} H_n(Z\otimes D)$

et $K : \sum_{p+q=n} B_p^- \otimes H_q(D) \xrightarrow{\sim} H_n(B^-\otimes D)$

sont des isomorphismes.

En effet, Z (resp B^-) est un complexe libre de bord trivial donc $Z_p = H_p(Z)$ (resp. $B_p^- = H_p(B^-)$) et Z_p (resp B_p^-) est plat puisque Z_p libre $\Rightarrow$ Z_p projectif $\Rightarrow$ Z_p plat. Le résultat provient du lemme :

<u>lemme</u> : Si A est un complexe de chaînes de bord trivial (ie $\partial = 0$) et si A_n est un R-module plat pour tout $n \in \mathbb{Z}$, le morphisme

$$K : \sum_{p+q=n} A_p \otimes H_q(D) \xrightarrow{\sim} H_n(A\otimes D)$$

que l'on peut écrire $K : A\otimes H(D) \to H(A\otimes D)$, est un isomorphisme.

preuve du lemme :

* $A_p = H_p(A)$ car le bord de A est trivial, et $H_n(A\otimes D) = \sum H_n(A_p\otimes D)$ car A est la somme directe des A_p, chaque A_p étant $p\in\mathbb{Z}$ considéré comme un complexe de chaînes (ie on prend le complexe $\tilde{A}$ / $\tilde{A}_n = 0$ si $n \neq p$ et $\tilde{A}_p = A_p$, pour $p \in \mathbb{Z}$ fixé)
* Montrer le lemme revient à montrer que, si p est fixé et si A_p est un R-module plat (considéré comme une chaîne)

$K : A_p \otimes H_{n-p}(D) \xrightarrow{\sim} H_n(A_p\otimes D)$ est un isomorphisme.

* On peut se contenter de montrer l'isomorphisme pour $p = 0$. Notons $A_0 = G$ le R-module plat et montrons l'isomorphisme

$$K : G \otimes H_n(D) \xrightarrow{\sim} H_n(G \otimes D) \qquad \forall n \in \mathbb{Z}$$

Le diagramme :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & & & \\
 & & \uparrow & & \downarrow & & & & \\
0 & \longrightarrow & B_n(D) & \overset{i}{\hookrightarrow} & Z_n(D) & \xrightarrow{p} & H_n(D) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \partial \uparrow & & \downarrow j & & & & \\
 & & C_{n+1}(D) & \xrightarrow[\partial_{n+1}]{} & C_n(D) & & & & \\
 & & & & \downarrow \partial_n & & & & \\
 & & & & C_{n-1}(D) & & & &
\end{array}$$

est commutatif.

Comme G est plat, les lignes et colonnes du diagramme suivant sont encore exactes :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & & & \\
 & & \uparrow & & \downarrow & & & & \\
0 & \longrightarrow & G \otimes B_n(D) & \xrightarrow{id_G \otimes i} & G \otimes Z_n(D) & \xrightarrow{id_G \otimes p} & G \otimes H_n(D) & \longrightarrow & 0 \\
 & & id_G \otimes \partial \uparrow & & \downarrow id_G \otimes j & & & & \\
 & & G \otimes C_{n+1}(D) & \xrightarrow[id_G \otimes \partial_{n+1}]{} & G \otimes C_n(D) & & & & \\
 & & & & \downarrow id_G \otimes \partial_n & & & & \\
 & & & & G \otimes C_{n-1}(D) & & & &
\end{array}$$

$id_G \otimes p$ est surjectif donc induit un isomorphisme $\dfrac{G \otimes Z_n(D)}{\mathrm{Im}(id_G \otimes i)} \xrightarrow[\sim]{\lambda} G \otimes H_n(D)$ par décomposition canonique.

On a $(id_G \otimes j)(\mathrm{Im}(id_G \otimes i)) = \mathrm{Im}(id_G \otimes \partial_{n+1})$

donc $id_G \otimes j$ induit l'isomorphisme :

$$\frac{G \otimes Z_n(D)}{\mathrm{Im}(id_G \otimes i)} \xrightarrow[\sim]{\mu} H_n(G \otimes D)$$

En effet, $H_n(G \otimes D) = \dfrac{\mathrm{Ker}(id_G \otimes \partial_n)}{\mathrm{Im}(id_G \otimes \partial_{n+1})} = \dfrac{\mathrm{Im}(id_G \otimes j)}{\mathrm{Im}(id_G \otimes \partial_{n+1})}$

et $G \otimes Z_n(D) \simeq \mathrm{Im}(id_G \otimes j)$ par $id_G \otimes j$, donc

$$\frac{G \otimes Z_n(D)}{\mathrm{Im}(id_G \otimes i)} \simeq \frac{\mathrm{Im}(id_G \otimes j)}{id_G \otimes j\,(\mathrm{Im}(id_G \otimes i))} = \frac{\mathrm{Im}(id_G \otimes j)}{\mathrm{Im}(id_G \otimes \partial_{n+1})}$$

Il suffit de constater que $\kappa = \mu \circ \lambda^{-1}$:

$$\begin{array}{ccc} G \otimes H_n(D) & \xrightarrow{\kappa} & H_n(G \otimes D) \\ g \otimes [z] & & [g \otimes z] \\ & \lambda^{-1} \searrow \quad \nearrow \mu & \\ & G \otimes Z_n(D) / \mathrm{Im}(id_G \otimes i) & \\ & \dot{\overline{g \otimes z}} & \end{array}$$

CQFD

La suite (2) s'écrit alors :

$$\cdots \to (B \otimes H(D))_n \xrightarrow{\Phi_n} (Z \otimes H(D))_n \longrightarrow H_n(C \otimes D) \longrightarrow (B \otimes H(D))_{n-1} \xrightarrow{\Phi_{n-1}} \cdots$$

où $\Phi_n = H_n(i \otimes id) \circ \kappa$

d'où la suite exacte :

$$0 \longrightarrow \mathrm{Coker}\, \Phi_n \longrightarrow H_n(C \otimes D) \longrightarrow \mathrm{Ker}\, \Phi_{n-1} \longrightarrow 0 \qquad (3)$$

On obtient $\mathrm{Coker}\, \Phi_n$ et $\mathrm{Ker}\, \Phi_n$ en utilisant la suite exacte scindée :

$$0 \longrightarrow B_p \xhookrightarrow{i_p} Z_p \longrightarrow H_p(C) \longrightarrow 0 \qquad (4)$$

qui donne :

$$B_p \otimes H_{n-p}(D) \xrightarrow{i_p \otimes id} Z_p \otimes H_{n-p}(D) \longrightarrow H_p(C) \otimes H_{n-p}(D) \longrightarrow 0 \qquad (5)$$

Notons que $\Phi_n = \sum_{p \in \mathbb{Z}} i_p \otimes id$.

(4) est une résolution projective de $H_p(C)$ car Z_p et B_p sont libres, donc $\mathrm{Ker}(i_p \otimes id) = \mathrm{Tor}\,(H_p(C), H_{n-p}(D))$. En additionnant toutes les suites obtenues à partir de (5) pour $p \in \mathbb{Z}$, on obtient la suite exacte

$$0 \to \sum_p \mathrm{Tor}(H_p(C), H_{n-p}(D)) \longrightarrow (B \otimes H(D))_n \xrightarrow{\Phi_n} (Z \otimes H(D))_n \to (H(C) \otimes H(D))_n \longrightarrow 0$$

donc
$$\begin{cases} \mathrm{Ker}\, \Phi_n = (\mathrm{Tor}(H(C), H(D)))_n \\ \mathrm{Coker}\, \Phi_n = (H(C) \otimes H(D))_n \end{cases} \qquad \text{(notation du 2°/)}$$

En remplaçant dans (3), on obtient la suite exacte de Künneth :

$$0 \to (H(C) \otimes H(D))_n \xrightarrow{\kappa} H_n(C \otimes D) \longrightarrow (\mathrm{Tor}(H(C), H(D)))_{n-1} \longrightarrow 0$$

Cette suite est scindée :

Comme (1) et $0 \to Z(D) \hookrightarrow D \xrightarrow{\partial} B^{-1}(D) \to 0$ sont des suites scindées, notons $u : C \to Z$ et $v : D \to Z(D)$ les inverses à gauche des inclusions canoniques.

Notons $\begin{cases} p : Z \to H(C) \\ q : Z(D) \to H(D) \end{cases}$ les projections canoniques.

$p \circ u : C \to H(C)$ et $q \circ v : D \to H(D)$ permettent de construire
$(p \circ u) \otimes (q \circ v) : C \otimes D \to H(C) \otimes H(D)$

On vérifie que $w \doteq H(p \circ u \otimes q \circ v) : H(C \otimes D) \to \underbrace{H(H(C) \otimes H(D)) = H(C) \otimes H(D)}$

(car $H(C) \otimes H(D)$ est 1 complexe de bord trivial)

est l'inverse à gauche de l'application $(H(C) \otimes H(D))_n \xrightarrow{k} H_n(C \otimes D)$ de la suite exacte de Künneth.

CQFD

Remarques : Si R est un anneau principal, supposons $R = \mathbb{Z}$:

1) Le morphisme de Künneth $k : (H(C) \otimes H(D))_n \to H_n(C \otimes D)$ est un isomorphisme dès que l'un des facteurs $H_p(C)$ ou $H_q(D)$ n'a pas de torsion, car $\mathrm{Tor}(\mathbb{Z}, M) = 0 \quad \forall M = \mathbb{Z}$-module

2) $\left.\begin{array}{l} C \text{ et } D \text{ acycliques} \\ H_0(C) = \mathbb{Z} \end{array}\right\} \Rightarrow C \otimes D = \text{complexe acyclique.}$

En effet, C et D n'ont d'homologie qu'en degré 0 et la suite exacte de Künneth s'écrit $0 \xrightarrow{k} H_n(C \otimes D) \to 0 \to 0 \quad \forall n \neq 0$

3) C et D contractibles $\Rightarrow$ $C \otimes D$ contractible

Si l'on suppose que C et D sont libres, on a contractible $\Leftrightarrow$ acyclique (cf. Spannier § 4.2)

4°/ Lien entre $H_n(X\times Y)$, $H_n(X)$ et $H_n(Y)$

> **Théorème d'Eilenberg-Zilber :**
> Les 2 complexes $C_*(X)\otimes C_*(Y)$ et $C_*(X\times Y)$ sont homotopiquement équivalents, ainsi les homologies de ces 2 complexes coïncident :
> $$\forall n\in\mathbb{N} \quad H_n(C(X)\otimes C(Y)) = H_n(X\times Y)$$

preuve : Il faut montrer l'existence d'une équivalence homotopique naturelle entre les 2 complexes $C_*(X)\otimes C_*(Y)$ et $C_*(X\times Y)$:

$$C(X)\otimes C(Y) \underset{S}{\overset{A}{\leftrightarrows}} C(X\times Y)$$

$A = EZ$ = morphisme d'Eilenberg-Zilber(*) tels que $EZ\circ S \sim id_{C(X\times Y)}$
S = Shuffle (battage de cartes) $S\circ EZ \sim id_{C(X)\otimes C(Y)}$

(où $\sim$ signifie "être homotope en tant que chaîne à *")

On utilise essentiellement le <u>théorème des modèles acycliques</u> :

<u>Rappel</u> : Si $\underline{\mathcal{C}} \overset{F}{\underset{G}{\rightrightarrows}}$ R-complexes$^+$ sont 2 foncteurs tels que :

1) F soit libre sur le modèle $\mathcal{M}=\{M_i\}$, ie $F_i(C) = R^{\{F_i(\beta)g_i\}_{\beta\in C^0(M_i,C)}}$ (où $g_i\in M_i$)
2) G acyclique sur le modèle $\mathcal{M}$, ie $G(M_i)$ acyclique $\forall M_i\in\mathcal{M}$

Alors tout morphisme de foncteurs $H_0F \to H_0G$ est induit par un morphisme de foncteurs $F\to G$ unique à homotopie près (cf L15 verso)

Prenons : $\underline{\mathcal{C}}$ = catégorie des paires d'e.t. $(X,Y) = \underline{Top}\times\underline{Top}$

$$F : \underline{\mathcal{C}} \rightsquigarrow \underline{R\text{-complexes}}$$
$$(X,Y) \longmapsto C(X)\otimes C(Y)$$

$$G : \underline{\mathcal{C}} \rightsquigarrow \underline{R\text{-complexes}^+}$$
$$(X,Y) \longmapsto C(X\times Y)$$

* F est libre sur les modèles (Δ^p,Δ^q), où Δ^p = p-simplexe euclidien, puisque
$C_*(X)\otimes C_*(Y) = R^{(S_*(X))}\otimes R^{(S_*(Y))} = R^{(S_*(X)\times S_*(Y))}$
et $S_*(X)\times S_*(Y) = C^0(\Delta^p\times\Delta^q, X\times Y)$.

* G est acyclique sur (Δ^p,Δ^q) : on a $H_n(C_*(\Delta^p\times\Delta^q)) = 0$ si $n\neq 0$ car $\Delta^p\times\Delta^q$ est contractible

(*) encore appelé "morphisme d'Alexander-Whitney"

* Il existe un isomorphisme $H_0(C(X)\otimes C(Y)) \xrightarrow[\sim]{\varphi} H_0(X\times Y)$. (*)

φ se prolonge donc de manière unique à homotopie près en un morphisme de foncteurs $F \to G$. Choisissons en un :

$$S : C_*(X)\otimes C_*(Y) \longrightarrow C_*(X\times Y)$$

défini pour tout couple (X,Y) d'e.t. et unique à homotopie de chaîne près.

On obtient $A : C_*(X\times Y) \longrightarrow C_*(X)\otimes C_*(Y)$ de la même façon, puisque :

* G est libre sur le modèle (Δ^p, Δ^q)
* F est acyclique sur (Δ^p,Δ^q)
* $\varphi^{-1} : H_0(X\times Y) \longrightarrow H_0(X)\otimes H_0(Y)$ est un isomorphisme.

Il existe donc un unique morphisme qui prolonge φ^{-1}.

Enfin, on utilise encore le théorème des modèles acycliques pour constater que $S\circ A$ est au dessus de l'identité $id : H_0(X\times Y) \longrightarrow H_0(X\times Y)$, et donc que $S\circ A$ est homotope, en tant que chaîne, à $id_{C_*(X\times Y)}$.
De même pour $A\circ S$.

<u>Conclusion</u> : EZ et S sont bien des équivalences homotopiques

CQFD

<u>Corollaire</u> : Si X et Y sont 2 e.t et si R est un anneau principal, on a :

$$H_n(X\times Y) \simeq \sum_{p+q=n} H_p(X)\otimes H_q(Y) \oplus \sum_{p+q=n-1} Tor(H_p(X), H_q(Y))$$

preuve :
On applique le th. de Künneth avec les complexes de chaînes singulières $C(X)$ et $C(Y)$ pour avoir la suite exacte scindée :

$$0 \longrightarrow \sum_{p+q=n} H_p(X)\otimes H_q(Y) \xrightarrow{K} H_n(C(X)\otimes C(Y)) \longrightarrow \sum_{p+q=n-1} Tor(H_p(X),H_q(Y)) \longrightarrow 0$$

Il suffit d'utiliser le théorème d'Eilenberg-Zilber qui montre que

$$H_n(C(X)\otimes C(Y)) \simeq H_n(X\times Y)$$

pour conclure.

CQFD

(*) φ est la composée :

$H_0(C(X)\otimes C(Y)) \underset{\sim}{\xleftarrow{K}} H_0(X)\otimes H_0(Y) = R^{(\pi_0(X))} \otimes_R R^{(\pi_0(Y))} = R^{(\pi_0(X)\times\pi_0(Y))} = R^{(\pi_0(X\times Y))} = H_0(X\times Y)$, où $\pi_0(X)$ désigne l'ensemble des composantes connexes de X. C'est le Th. de Künneth qui prouve que K est un iso. au rang 0 car $H_0(X)$ est libre !.

Remarque : Si $H_k(X)$ (ou $H_k(Y)$) est libre ou projectif pour tout $k < n$, ou bien si R est un corps, on aura :

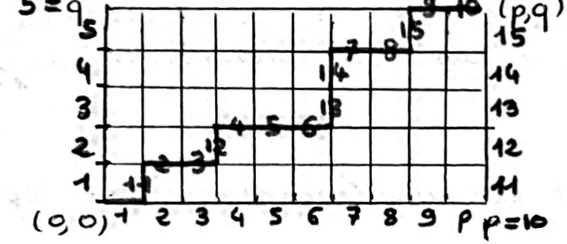
$$H_n(X \times Y) = \sum_{p+q=n} H_p(X) \otimes H_q(Y)$$

puisque $Tor(M,N) = 0$ dès que M ou N est un R-module projectif

Formules explicites pour A et S :

Une permutation $\sigma \in \Sigma_{p+q}$ est un (p,q)-shuffle si $\sigma(1) < \dots < \sigma(p)$ et $\sigma(p+1) < \dots < \sigma(p+q)$

A tout (p,q)-shuffle on peut faire correspondre un chemin croissant d'origine $(0,0)$ et d'extrémité (p,q) constitués de segments horizontaux ou verticaux : on obtient une bijection.



Le chemin rouge correspond au (p,q) shuffle σ d'inverse

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 1 & 11 & 2 & 3 & 12 & 4 & 5 & 6 & 13 & 14 & 7 & 8 & 15 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

L'ensemble des (p,q)-shuffle est en bijection avec l'ensemble des fonctions croissantes de $\{0,\dots,p+q\} \longrightarrow \{0,p\} \times \{0,q\}$, est de cardinal C^p_{p+q} et de signature $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{a(\sigma)}$ où $a(\sigma) = \int_0^p y(t)\,dx(t)$ représente l'aire sous le chemin associé à σ.

Pour chaque (p,q)-shuffle σ, on peut définir une application

$$\gamma_\sigma : \Delta^{p+q} \longrightarrow \Delta^p \times \Delta^q$$

Alors : S : $C(X) \otimes C(Y) \longrightarrow C(X \times Y)$

$$s \otimes t \longmapsto \sum_\sigma \varepsilon(\sigma)\,(s \times t) \circ \gamma_\sigma$$

où $\begin{cases} s \otimes t \in (C(X) \otimes C(Y))_{p+q} \\ s : \Delta^p \to X \\ t : \Delta^q \to Y \end{cases}$ et $\Delta^{p+q} \xrightarrow{\gamma_\sigma} \Delta^p \times \Delta^q \xrightarrow{s \times t} X \times Y$

On vérifie que S commute avec les différentielles, ie $S(\partial_X \otimes Id_Y + Id_X \otimes \partial_Y) = S\partial_{X\times Y}$ et induit le morphisme $\varphi : H_0(C(X) \otimes C(Y)) \longrightarrow H_0(X \times Y)$.

On peut définir le morphisme d'Alexander-Whitney par :

$$A : C(X \times Y) \longrightarrow C(X) \otimes C(Y)$$
$$s = (s_x, s_y) \longmapsto \sum_{p+q=n} (s_x \circ \lambda_p) \otimes (s_y \circ \rho_q)$$

où $s \in S_n(X \times Y)$ $\begin{cases} s_x \in S_n(X) \\ s_y \in S_n(Y) \end{cases}$

$\lambda_p : \Delta^p \longrightarrow \Delta^n$ désigne la p-face de front de Δ^n,
$(a_0, \dots, a_p) \longmapsto (a_0, \dots, a_p)$

et $\rho_q : \Delta^q \longrightarrow \Delta^n$ désigne la q-face de derrière de Δ^n.
$(a_0, \dots, a_q) \longmapsto (a_{n-q}, \dots, a_n)$

5°/ En homologie relative :

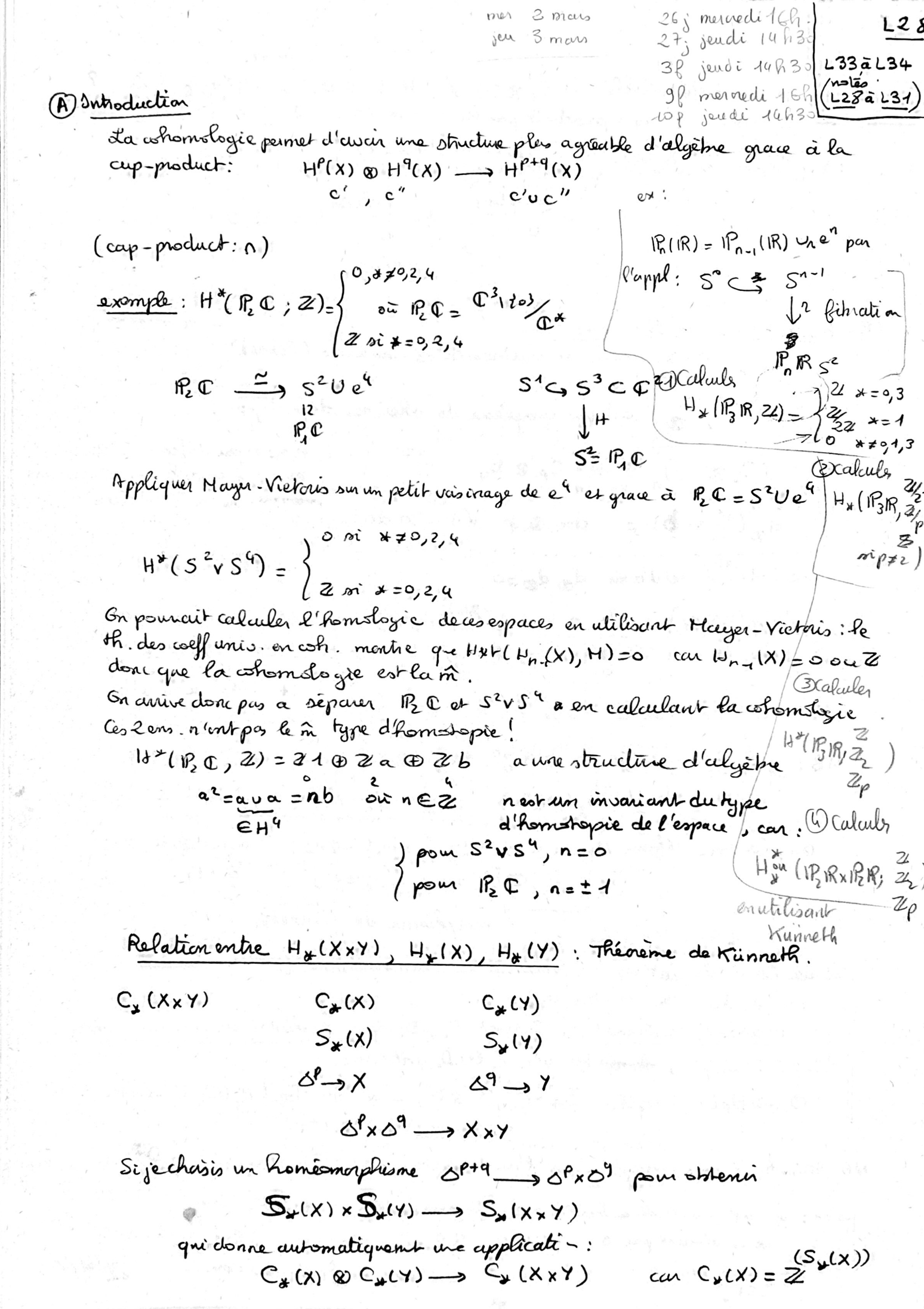
La suite exacte de Künneth peut s'écrire avec l'homologie relative. Il suffit de considérer les complexes de chaînes :

$C = C(X,A)$ = complexe de chaînes relatives de X modulo A,
$D = C(Y,B)$ = " " " de Y modulo B.

d'où la suite exacte scindée :

$$0 \to \sum_{p+q=n} H_p(X,A) \otimes H_q(Y,B) \xrightarrow{\kappa} H_n(C(X,A) \otimes C(Y,B)) \to \sum_{p+q=n-1} \mathrm{Tor}(H_p(X,A), H_q(Y,B)) \to 0$$

Problème : Re-écrire $H_n(C(X,A) \otimes C(Y,B))$



mer 2 mars
jeu 3 mars

26 j mercredi 16h
27 j jeudi 14h30
3 f jeudi 14h30
9 f mercredi 16h
10 f jeudi 14h30

L28
L33 à L34
(notés L28 à L31)

(A) Introduction

La cohomologie permet d'avoir une structure plus agréable d'algèbre grace à la cup-product :

$$H^p(X) \otimes H^q(X) \longrightarrow H^{p+q}(X)$$
$$c', c'' \qquad\qquad c' \cup c''$$

(cap-product : $\cap$)

ex :

$\mathbb{P}_n(\mathbb{R}) = \mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{R}) \cup_\lambda e^n$ par l'appl : $S^0 \hookrightarrow S^{n-1} \downarrow^2$ fibration $\mathbb{P}_n\mathbb{R}$ S^2

exemple : $H^*(\mathbb{P}_2\mathbb{C}\,;\mathbb{Z}) = \begin{cases} 0, * \neq 0,2,4 \\ \mathbb{Z} \text{ si } * = 0,2,4 \end{cases}$ où $\mathbb{P}_2\mathbb{C} = \mathbb{C}^3 \setminus \{0\} / \mathbb{C}^*$

$$\mathbb{P}_2\mathbb{C} \xrightarrow{\simeq} S^2 \cup e^4 \qquad S^2 \cong \mathbb{P}_1\mathbb{C}$$

$$S^1 \hookrightarrow S^3 \subset \mathbb{C}^2 \quad \downarrow H \quad S^2 = \mathbb{P}_1\mathbb{C}$$

(1) Calculs $H_*(\mathbb{P}_3\mathbb{R}, \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & * = 0,3 \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & * = 1 \\ 0 & * \neq 0,1,3 \end{cases}$

(2) calculs $H_*(\mathbb{P}_3\mathbb{R}, \mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/p$ si $p \neq 2)$

Appliquer Mayer-Vietoris sur un petit voisinage de e^4 et grace à $\mathbb{P}_2\mathbb{C} = S^2 \cup e^4$

$$H^*(S^2 \vee S^4) = \begin{cases} 0 \text{ si } * \neq 0,2,4 \\ \mathbb{Z} \text{ si } * = 0,2,4 \end{cases}$$

On pourrait calculer l'homologie de ces espaces en utilisant Mayer-Vietoris : le th. des coeff univ. en coh. montre que $\mathrm{Ext}(H_{n-1}(X), H) = 0$ car $H_{n-1}(X) = 0$ ou $\mathbb{Z}$ donc que la cohomologie est la m̂.

(3) Calculer $H^*(\mathbb{P}_3\mathbb{R}, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_p)$

On arrive donc pas à séparer $\mathbb{P}_2\mathbb{C}$ et $S^2 \vee S^4$ en calculant la cohomologie. Ces 2 ens. n'ont pas le m̂ type d'homotopie !

$H^*(\mathbb{P}_2\mathbb{C}, \mathbb{Z}) = \underset{0}{\mathbb{Z}1} \oplus \underset{2}{\mathbb{Z}a} \oplus \underset{4}{\mathbb{Z}b}$ a une structure d'algèbre

$a^2 = \underbrace{a \cup a}_{\in H^4} = nb$ où $n \in \mathbb{Z}$ n est un invariant du type d'homotopie de l'espace, car :

$$\begin{cases} \text{pour } S^2 \vee S^4, \; n = 0 \\ \text{pour } \mathbb{P}_2\mathbb{C}, \; n = \pm 1 \end{cases}$$

(4) Calculs H^*_* ou $(\mathbb{P}_2\mathbb{R} \times \mathbb{P}_2\mathbb{R}; \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_p)$ en utilisant Künneth

Relation entre $H_*(X \times Y)$, $H_*(X)$, $H_*(Y)$: Théorème de Künneth.

$$C_*(X \times Y) \qquad C_*(X) \qquad C_*(Y)$$
$$S_*(X) \qquad S_*(Y)$$
$$\Delta^p \to X \qquad \Delta^q \to Y$$
$$\Delta^p \times \Delta^q \longrightarrow X \times Y$$

Si je choisis un homéomorphisme $\Delta^{p+q} \longrightarrow \Delta^p \times \Delta^q$ pour obtenir

$$S_*(X) \times S_*(Y) \longrightarrow S_*(X \times Y)$$

qui donne automatiquement une application :

$$C_*(X) \otimes C_*(Y) \longrightarrow C_*(X \times Y) \qquad \text{car } C_*(X) = \mathbb{Z}^{(S_*(X))}$$

isom.

Mettre une différentielle sur $C_\cdot \otimes D_\cdot$ / $H(C_\cdot \otimes D_\cdot) \overset{\sim}{\leftarrow} H_\cdot C \otimes H_\cdot D$?

On définira ensuite le cup-produit par la diagonale :

$$\begin{array}{ccc} C^*(X) \otimes C^*(X) & \xrightarrow[\text{équivalence d'homotopie de complexes}]{\sim} & C^*(X \times X) \\ & \searrow^{\cup} & \downarrow c^*(\Delta) \\ & & C^*(X) \end{array}$$

(B) <u>Produit tensoriel de 2 complexes</u>

$C_\cdot$, $D_\cdot$ complexes de chaînes de $\mathbb{Z}$-modules (libres)

$(C_\cdot \otimes D_\cdot, d_\otimes)$ est un complexe de chaînes défini par :

$$\begin{cases} (C_\cdot \otimes D_\cdot)_n = \bigoplus_{p+q=n} C_p \otimes D_q \\ d_\otimes(a \otimes b) = da \otimes b + (-1)^{|a|} a \otimes db \end{cases}$$

(<u>Rem</u>: on peut définir $C^\cdot \otimes D^\cdot$ pour des complexes de cochaînes ~~puisqu'on~~ de la même manière)

Le signe $(-1)^{|a|}$ permet d'avoir $d_\otimes d_\otimes = 0$

$$d_\otimes(d_\otimes(a \otimes b)) = \underbrace{d^2 a \otimes b}_{= 0} + (-1)^{|a|-1} da \otimes db + (-1)^{|a|} da \otimes db + \underbrace{(-1)^{2|a|} a \otimes d^2 b}_{= 0}$$

$= 0$

NB : $z' \in Z_\cdot C$, $z'' \in Z_\cdot D \Rightarrow z' \otimes z'' \in Z(C \otimes D)$
$z' \otimes db = (-1)^{|z'|} d_\otimes(z' \otimes b)$) (1)

(on notera $d_\otimes = d$)

On peut donc définir :

$$H_\cdot C \otimes H_\cdot D \xrightarrow{K} H_\cdot(C \otimes D)$$
$$[z] \otimes [z'] \longmapsto [z \otimes z']$$

bien définie grâce à (1).

morphisme de Künneth

Quelle est le défaut de surjectivité de ce morphisme ?

<u>Théorème de Künneth</u> : Soient $C_\cdot$, $D_\cdot$ des <u>complexes de chaînes</u> ~~libres~~ <u>de $\mathbb{Z}$-modules</u>, ~~dont~~ tels que $C_\cdot$ ou $D_\cdot$ soit libre

$$0 \to H_p(C) \otimes H_q(D) \xrightarrow{K} H_{p+q}(C \otimes D) \to \bigoplus_{i+j=p+q-1} \mathrm{Tor}(H_i(C), H_j(D)) \to 0$$

NB : Künneth est un isomorphisme si l'un des facteurs n'a pas de torsion car $\mathrm{Tor}(\mathbb{Z}, M) = 0$ $\forall M$ $\mathbb{Z}$-mod

preuve : cf. coef. universels en homologie – même genre de dém. Hyp : C libre

on démarre par $0 \to Z_p C \hookrightarrow C_p \xrightarrow{d} B_{p-1} \to 0$ scindée car B_{p-1}, C_p et Z_p libres..

CQFD

~~Co || Si C. et D. sont acycliques, C. ⊗ D. aussi et $H_0(C) = \mathbb{Z}$~~

Co || Si C. et D. sont acycliques et $H_0 C = \mathbb{Z}$, C. ⊗ D. est acyclique.

<u>exercice</u> : C, D contractibles ⟹ C ⊗ D aussi

<u>Théorème</u> : Les 2 complexes $C_*(X) \otimes C_*(Y) \xrightarrow{\sim} C_*(X \times Y)$ sont homotopiquement équivalents

ie ∃ équivalence homotopique naturelle entre ces 2 complexes.

$$C_*(X) \otimes C_*(Y) \underset{EZ}{\overset{S}{\rightleftarrows}} C_*(X \times Y)$$

Eilenberg-Zilber ↑ EZ, S ↗ shuffle (battage de cartes) morph. de chaîns

$\left\{ \begin{array}{l} EZ \circ S \sim id_{C_*(X \times Y)} \\ S \circ EZ \sim id_{C_*(X)} \otimes id_{C_*(Y)} \end{array} \right.$

Les homologies de ces 2 complexes sont donc les mêmes.

preuve : cf. <u>Th. des modèles acycliques</u> : "

$\mathcal{C} \underset{G}{\overset{F}{\rightrightarrows}}$ $\mathbb{Z}$-complexe F, G foncteurs $\left\{ \begin{array}{l} F \text{ libre sur } \{M_i\} \text{ ie } F_i(C) = \mathbb{Z}^{C(M_i, C)} \text{ (naturel en } C) \\ G \text{ acyclique.} \end{array} \right.$

Tout homomorphisme de foncteur de $H_0 F \to H_0 G$ se prolonge de manière unique (à homotopie près) en 1 morphisme de foncteurs de $F \to G$ "

On prend ici :

$\mathcal{C}$ = couples d'espaces topologiques (X, Y) = Top × Top

$F : \mathcal{C}m \longrightarrow \mathbb{Z}$-complexe
$(X, Y) \longmapsto C_*(X) \otimes C_*(Y)$

$G : \mathcal{C}m \longrightarrow \mathbb{Z}$
$(X, Y) \longmapsto C_*(X \times Y)$

modèles : F est libre sur les modèles (Δ^p, Δ^q) Δ^p = p-simplexe standard, car $C_*(X) \otimes C_*(Y)$ libre de base $\mathbb{Z}^{S_*(X) \times S_*(Y)}$

G acyclique sur (Δ^p, Δ^q) car Δ^p et Δ^q sont contractibles.

Cet isomorphisme se prolonge de manière unique (à hom. près) en ~~de EZ → ZG~~ 1 morphisme de foncteurs de F → G

((et $H_0(X) \otimes H_0(Y) \xrightarrow[\text{isomorph.}]{\sim} H_0(X \times Y)$)) cf L30

$[z] \otimes [z'] \qquad [(z, z')]$

ou bien, $H_0(X) = \mathbb{Z}$-module libre de générateurs les composantes connexes de X, donc

EZ est unique à homotopie près : on en choisit 1.

$H_0(X) \otimes H_0(Y) = \mathbb{Z}$-module libre sur les composantes connexes de X × Y

Pour avoir S : G libre sur (Δ^n, Δ^n)
F acyclique sur (Δ^n, Δ^n)

$$H_0(X\times Y) \xrightarrow[\text{iso}]{\sim} H_0(X) \otimes H_0(Y)$$

donc $\exists!$ morphisme $S : C_*(X\times Y) \to C_*(X) \otimes C_*(Y)$

De plus, on utilise encore le Th. des mod. acycl. pour constater que $EZ \circ S$ est au dessus de l'identité $H_0(X\times Y) \xrightarrow{id} H_0(X\times Y)$, donc il est homotope à l'$id_{C_*(X\times Y)}$ car le foncteur B G est libre et acyclique sur les modèles (Δ_p, Δ_q).

CQFD

Calcul direct :

$$EZ(\sigma \otimes \tau)(r_0, r_1, \dots, r_{p+q}) = \sigma(r_0, \dots, r_p), \tau(r_p, \dots, r_q)$$

$\sigma : \Delta^p \to X$
$\tau : \Delta^q \to Y$

$$C(X\times Y) \xrightarrow{A} C(X) \otimes C(Y)$$

$$s = (s_x, s_y) \longmapsto s_x \lambda_p \otimes s_y \rho_{n-p}$$

$s \in S_n(X\times Y)$
$s_x \in S_n(X)$
$s_y \in S_n(Y)$

où λ_p = p-ième face de front
ρ_{n-p} = n-p-ième face de derrière

$\lambda_p : \Delta^p \to \Delta^n$
$(a_0, \dots, a_p) \quad (a_0, \dots, a_p)$

$\rho_{n-p} : \Delta^{n-p} \to \Delta^n$
$(a_0, \dots, a_{n-p}) \mapsto (a_{n-p}, \dots, a_n)$

2) Si U et V sont des ouverts de T = variété diff $V \subset U$. Comment calculer $H_k(U, U\setminus V)$?

(V, U)

erreur de notations

(NB)

$$C_\cdot(X)\otimes C_\cdot(Y) \underset{S}{\overset{A}{\rightleftarrows}} C_\cdot(X\times Y) \qquad C_n(X) = \mathbb{Z}^{(S_n(X))}$$

← Alexander-Whitney

isomorph. canonique utilisé pour calculer le th. mod. acycl.

$$H_0(C_\cdot(X)\otimes C_\cdot(Y)) \longrightarrow H_0(C_\cdot(X\times Y))$$

$\simeq \uparrow K$ $\qquad$ $\shortparallel$

$$H_0(X\times Y)$$

$$H_0(X)\otimes H_0(Y) = \mathbb{Z}^{(\pi_0(X))}\otimes\mathbb{Z}^{(\pi_0(Y))} = \mathbb{Z}^{(\pi_0(X)\times\pi_0(Y))} = \mathbb{Z}^{\pi_0(X\times Y)} = H_0(X\times Y)$$

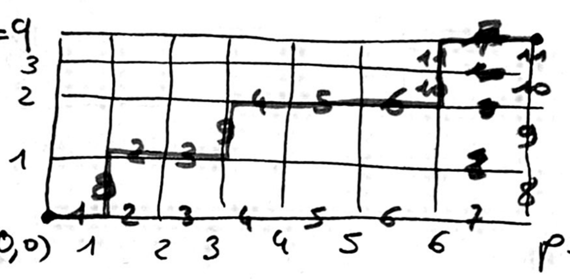
$\pi_0(X)$ = ens des composantes connexes de X

Le théorème de Kunneth montre que l'isomorph. de Künneth est un isomorphisme au rang 0.

__Formules explicites__ : a) __Shuffle__

$\sigma\in\mathfrak{S}_{p+q}$ est un (p,q)-shuffle si $\sigma^{-1}(1)<\ldots<\sigma^{-1}(p)$ et $\sigma^{-1}(p+1)<\ldots<\sigma^{-1}(p+q)$.

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11\\ 1\end{pmatrix}$$



A tout (7,4) shuffle, on peut faire correspondre un chemin qui part de (0,0) et arrive en (1,1) en montant constamment, ie l'ens de fcts croissants de $\{0,\ldots,p+q\}$ dans $\{0,p\}\times\{0,q\}$, de la manière suivante :

E | (1, 8, 2, 3, 9, 4, 5, 6, 10, 11, 7) est un (7,4) shuffle

Nbre de (p,q)-shuffle $= C^p_{p+q}$. Si σ est un (p,q)-shuffle, sa signature est $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{\text{aire sous le chemin associé à }\sigma} = (-1)^{a(\sigma)}$

où $a(\sigma) = \int_0^p y(t)\,dx(t)$ $\qquad \begin{pmatrix}x(t)\\ y(t)\end{pmatrix}$ chemin.

$$\sigma \mapsto \{\Delta^{p+q} \xrightarrow{\gamma_\sigma} \Delta^p\times\Delta^q\}$$

il y a C^p_{p+q} application.

$$S:\ C_\cdot(X)\otimes C_\cdot(Y) \longrightarrow C_\cdot(X\times Y)$$

$$s\otimes t\in (C_\cdot(X)\otimes C_\cdot(Y))_{p+q} \longmapsto \sum \varepsilon(\sigma)\,(s\times t)\circ\gamma_\sigma$$

$s:\Delta^p\to X$

$t:\Delta^q\to Y$

$$\Delta^p\times\Delta^q \xrightarrow{s\times t} X\times Y$$

$$\uparrow \gamma_\sigma$$

$$\Delta^{p+q}$$

On vérifie que S commute avec les différentielles :

$$S(\partial_X \otimes id_Y + id_X \otimes \partial_Y) = S\, \partial_{X\times Y}$$

Dans l'autre sens b) morphisme d'Alexander-Whitney

$$A : C_\cdot(X\times Y) \longrightarrow C_\cdot(X) \otimes C_\cdot(Y)$$

$$s=(s_x, s_y) \longmapsto \sum_{i+j=n} {}_i(s_x) \otimes (s_y)_j$$

où $s \in S_n(X\times Y)$

$\begin{cases} s_x \in S_n(X) \\ s_y \in S_n(Y) \end{cases}$

$$\Delta^i \xrightarrow{\lambda_i} \Delta^n \xrightarrow{s} X \quad ({}_i s)$$

$(0,\dots,i) \mapsto (0,\dots,i)$

i-ième face de front

$$\Delta^j \xrightarrow{\rho_j} \Delta^n \xrightarrow{s} X \quad (s_j)$$

$(0,\dots,j) \longmapsto (n-j,\dots,n)$

$j$ième face de derrière

CUP-PRODUIT

R = anneau (ie $\mathbb{Z}$-algèbre) commutatif.

$$H^*(X;R) \otimes H^*(X;R) \longrightarrow H^*(X;R)$$

$$a \quad b \longmapsto a\cup b \text{ ou } ab$$

$$H^*(X;R) = H^*(C^\cdot(X;R)) \text{ où } C^\cdot(X,R) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(C_\cdot(X),R) = R^{S_\cdot(X)}$$

~~D'après le th de~~ Le morphism de Künneth K donne : pas forcément injectif ! car les complexes ne sont pas libres.

$$H^*(X;R) \otimes H^*(X;R) \xrightarrow{K} H^*(C^\cdot(X;R) \otimes C^\cdot(X;R))$$

$\downarrow$ $H^*(-)$ est injective ⊕

$$H^*(\mathrm{Hom}(C_*(X) \otimes C_*(X), R)) \quad ⊕$$

$S \downarrow H^*({}^tA)$ (A = morph d'Alex. Whit.)

$$H^*(\mathrm{Hom}(C_*(X\times X), R) \doteq H^*(C^\cdot(X\times X)) = H^*(X\times X;R)$$

$$H^*(X;R) \xleftarrow{H^*(\Delta)} H^*(X\times X;R)$$

Δ = diagonale : $\Delta : X \to X\times Y$, $x \mapsto (x,x)$

⊛ $H^*({}^tA)$ est un isomorphisme (d'après lemme des 5 et th. coef. univ.)

~~$H_*(X\times Y) = H_*(C.(X)\otimes C.(Y))$~~ $\longleftarrow H_*(X)$

$$\begin{array}{c} 0 \\ \uparrow \\ Tor(H_*(X), H_*(Y)) \\ \uparrow \\ H_*(X\times Y) = H_*(C.(X)\otimes C.(Y)) \\ \uparrow \kappa \\ H_*(X)\otimes H_*(Y) \\ \uparrow \\ 0 \end{array}$$

suite de Kunneth (~~libre~~!)

ici on voit que κ est un iso si $H_*(X)$ ou $H_*(Y)$ libre

ce qui n'est pas le cas de κ dans la feuille précédente.

⊛ lem des 5 :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \to Ext(H_{*-1}(C.\otimes C.), R) & \longrightarrow & H^*(Hom(C.\otimes C., R) & \to & Hom(H_*(C.\otimes C.), R) & \to & 0 \\ Ext(isom) \downarrow \wr\wr & & \downarrow H^*({}^tA) & & \downarrow \wr\wr\ Hom(isomorph) & & \\ 0 \to Ext(H_{*-1}(C(X\times X)), R) & \longrightarrow & H^*(Hom(C.(X\times X), R) & \longrightarrow & Hom(H_*(X\times Y), R) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

donc $H^*({}^tA)$ est un isomorphisme.

⊕

$$Hom(C, R)\otimes Hom(C, R) \longrightarrow Hom(C\otimes C, R)$$
$$f \otimes g \longmapsto (x\otimes y \mapsto f(x) \cdot g(y))$$

injectif seul. (surjectif dès qu'on a des R-mod de type fini, ce qui n'est pas le cas ici)

Tout est canonique sauf peut être $H^*({}^tA)$.

Propriétés du cup-produit

$$H^*(X;R) \otimes H^*(X;R) \xrightarrow{\cup} H^*(X;R) \ / \ H^p(X;R) \otimes H^q(X;R) \xrightarrow{\cup} H^{p+q}(X;R)$$

1% $\cup$ est R-bilinéaire $(\lambda a) \cup b = a \cup (\lambda b) = \lambda (a \cup b)$

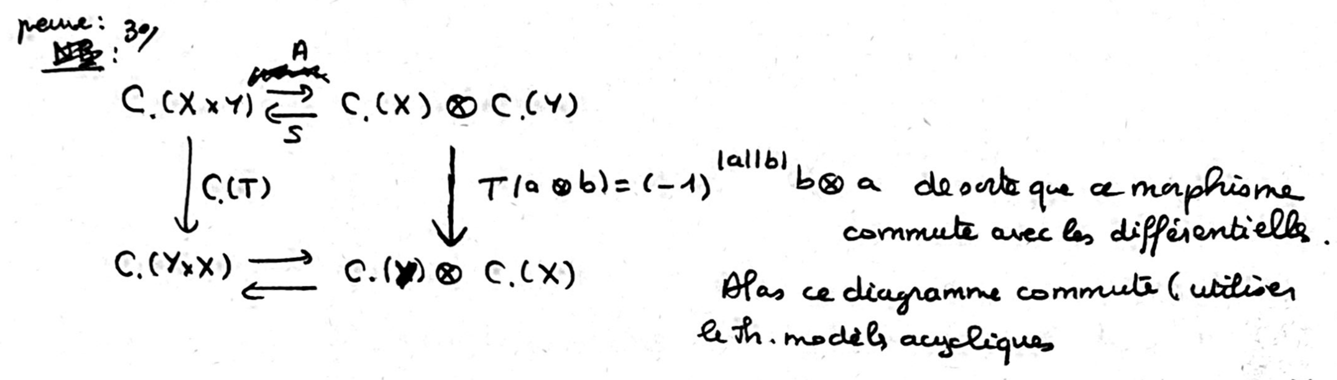
2% associatif $a \cup (b \cup c) = (a \cup b) \cup c$

3% commutatif au sens gradué : $a \cup b = (-1)^{|a||b|} b \cup a$

4% $1 \in H^0(X;R)$ = fct constante qui vaut 1 sur tous les point (les $C^0(X)$ = fcts sur les pts $C_0(X)$.) Alors $1 \cup a = a \cup 1$

$H^*(X;R)$ = R-algèbre gradué commutative

preuve : 3%



$T : X \times Y \to Y \times X$
$(x, y) \to (y, x)$

exercice : Dans $S^2 \vee S^2 \vee S^4$ le $\cup^2 = 0$

$S^2 \times S^2$ le $\cup^2$

et $H^*(S^2 \vee S^2 \vee S^4) = H^*(S^2 \times S^2)$ est un isomorphisme de R-moduls mais non d'algèbre. On peut donc distinger ces 2 espaces en regardant le cup-produit $\cup$.

(Biblio : Voir la dualité de Poincaré ou Greeberg.)

Suites spectrales.

Si (X,A) est une paire, on a la suite exacte $0 \to C(A) \to C(X) \to C(X,A) \to 0$ d'où la suite exacte d'homologie longue

$$\begin{array}{ccc} H_*(A) & \longrightarrow & H_*(X) \\ {\scriptstyle -1}\nwarrow & & \swarrow \\ & H_*(X,A) & \end{array}$$

et l'on peut parfois calculer l'homologie de X connaissant $H_*(A)$ et $H_*(X,A)$.

Une filtration généralise la notion de paire : Une <u>filtration</u> (resp. une <u>filtration différentielle</u>) d'un objet X (resp. d'un objet différentiel X) est la donnée d'une suite croissante de sous-objets

$$\ldots \subset F_p X \subset F_{p+1} X \subset F_{p+2} X \subset \ldots \subset X$$

(resp. qui vérifient de plus $d(F_p X) \subset F_p X$)

Dans la pratique $F_p X = \emptyset$ si $p < 0$ et $F_p X = X$ si p assez grand.

ex : Si $A \subset X$, on peut prendre $\begin{cases} F_p X = \emptyset & \text{si } p<0 \\ F_0 X = A & \\ F_1 X = X = F_p X & \text{si } p \geq 1. \end{cases}$

ex : $\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) = S^2 \cup e^4 \cup e^6 \cup \ldots \cup e^{2n}$ est muni d'une <u>filtration naturelle</u>.

Une filtration introduit de nombreuses paires topologiques qu'il s'agit de structurer :

paire $(F_p X, F_{p-1} X)$

$$\begin{array}{ccc} H_*(F_{p-1}X) & \longrightarrow & H_*(F_p X) \\ {\scriptstyle -1}\nwarrow & & \swarrow \\ & H_*(F_p X, F_{p-1} X) & \end{array}$$

(triangle exact)

paire $(X, F_p X)$

$$\begin{array}{ccc} H_*(F_p X) & \longrightarrow & H_*(X) \\ {\scriptstyle -1}\nwarrow & & \swarrow \\ & H_*(X, F_p X) & \end{array}$$

Si $i : F_p X \hookrightarrow F_{p+1} X$, posons $F_n(H(X)) = \mathrm{Im}\,(H(i) : H(F_n X) \to H(X))$.
On obtient une filtation de l'homologie HX :

$$F_n(HX) \subset F_n(HX) \subset \ldots \subset HX$$

Etant donnée n'importe quelle filtration $\{F_p X\}_p$ d'un objet X on défini le gradué associé à cette filtration par :

$$Gr_\cdot(X) = \{ Gr_p X \}_p \quad \text{où} \quad Gr_p X = F_pX / F_{p-1}X$$

Posons :

$$A_{p,q} = H_{p+q}(F_p X)$$
$$E_{p,q} = H_{p+q}(F_pX, F_{p-1}X)$$

- p = degré filtrant
- $p+q$ = degré total
- q = degré complémentaire
- (p,q) = bidegré

$\{A_{p,q}\}$ et $\{E_{p,q}\}$ sont des objets bi-gradués, et l'on obtient un <u>couple exact</u> (terminologie de Massey) :

$$\begin{array}{ccc} A_{*,*} & \xrightarrow[i]{(+1,-1)} & A_{*,*} \\ & {\scriptstyle k\,(-1,0)} \nwarrow \quad \swarrow {\scriptstyle j\,(0,0)} & \\ & E_{*,*} & \end{array}$$

$(+1,-1)$ = degré de l'application i

On peut définir la notion de couple dérivé (cf. Annexe A, §1) et dériver plusieurs fois le couple $(A_{*,*}, E_{*,*}, i, j, k)$ pour obtenir les couples exacts dérivés :

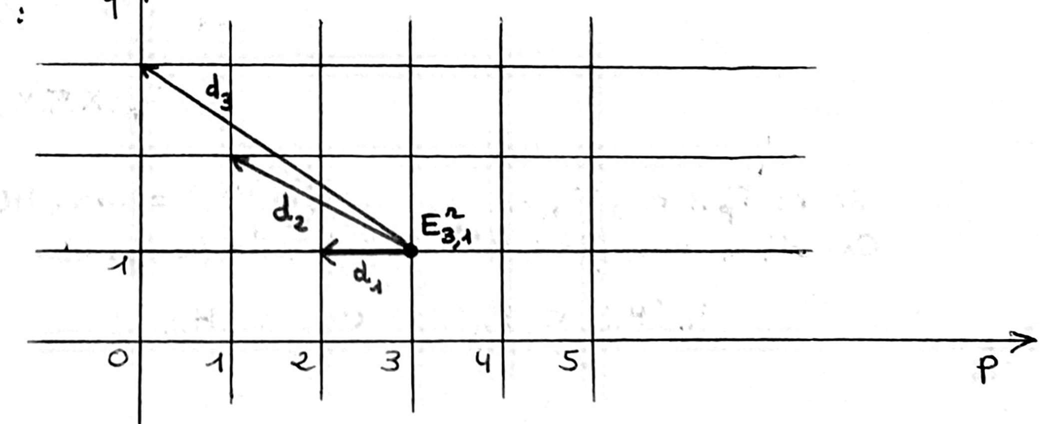
$$\begin{array}{ccc} A^r_{*,*} & \xrightarrow[i^{(r)}]{(1,-1)} & A^r_{*,*} \\ & {\scriptstyle k^{(r)}\,(-1,0)} \nwarrow \quad \swarrow {\scriptstyle j^{(r)}\,(1-r,r-1)} & \\ & E^r_{*,*} & \end{array}$$

où : $\begin{cases} A^1_{p,q} = A_{p,q} \\ E^1_{p,q} = E_{p,q} \end{cases}$ $\begin{cases} i^{(r)} = \text{restriction de } i \text{ à } i^{(r-1)}A \\ j^{(r)} = j \circ i^{1-r} \text{ (abus)} \\ k^{(r)} = k \text{ (abus)} \end{cases}$

$d^r = j^{(r)} \circ k^{(r)}$ est la différentielle de l'objet $E^r_{*,*}$, de degré $|d^r| = (-r, r-1)$

ie $d^r_{p,q} : E^r_{p,q} \longrightarrow E^r_{p-r,q+r-1}$

On représente souvent la différentielle $d^r_{p,q}$ par un graphique :



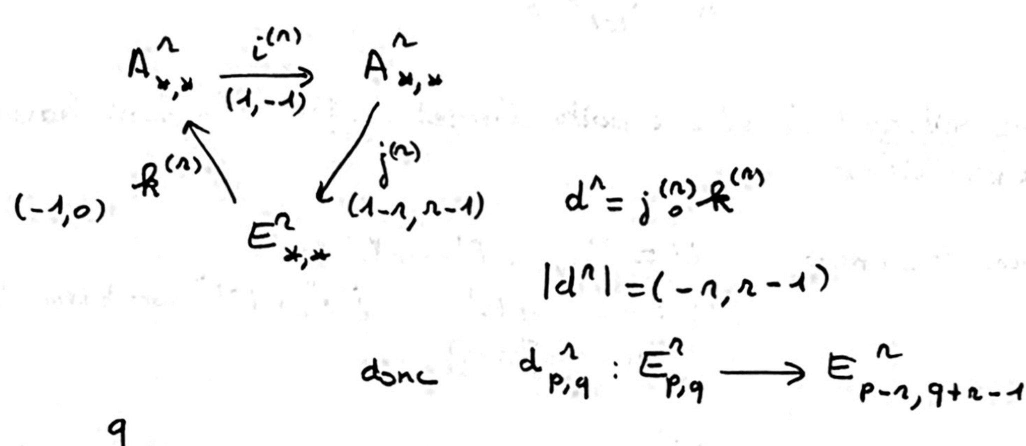
Beaucoup d'arguments concernant les suites spectrales sont purement géométriques et sont donnés par observation de la représentation graphique précédente.

Retour à la situation du bigradué : écrivons $F_p = F_p X$

$$A^1_{p,q} = H_{p+q}(F_p)$$
$$E^1_{p,q} = H_{p+q}(F_p, F_{p-1})$$

$$A^1_{*,*} \xrightarrow[(1,-1)]{i} A^1_{*,*} \xrightarrow[(0,0)]{j} E^1_{*,*} \xrightarrow[(-1,0)]{k} A^1_{*,*}$$

d'où les couples dérivés :

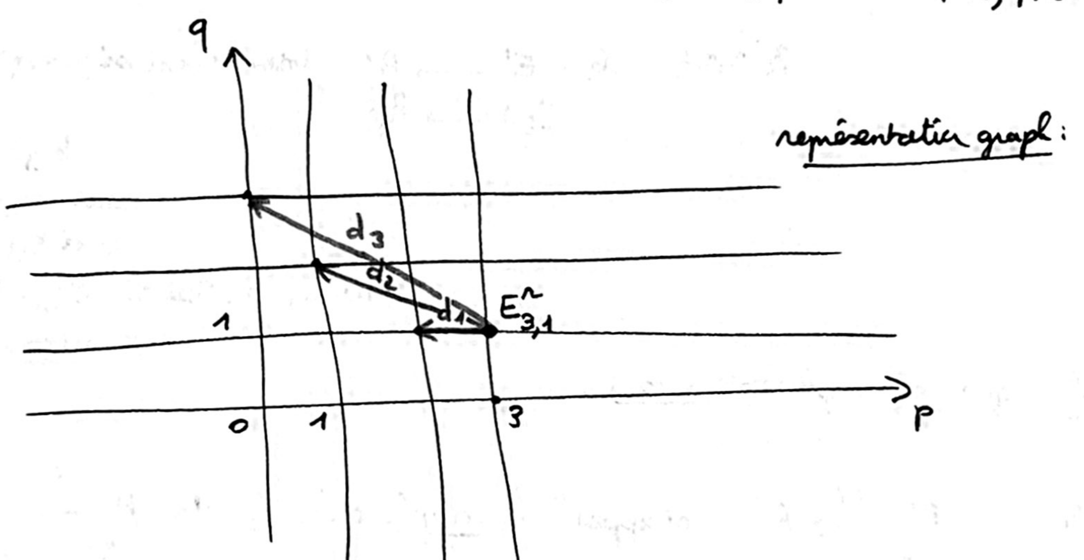


$d^r = j^{(r)} \circ k^{(r)}$

$|d^r| = (-r, r-1)$

donc $d^r_{p,q} : E^r_{p,q} \longrightarrow E^r_{p-r, q+r-1}$

représentation graph :



Beaucoup d'argument concernant les suites spectrals sont purement géométriqu et donnés par observation de la représentation graphique ci-dessus. Il arrive souvent que $E^r_{p,q}$ soit nul sur toute une partie du plan, example pour $p<0$ ou $q<0$

Si $F_p = \emptyset$, lorsque $p<0$,
$H_n(F_p) = H_n(X)$ $\forall n < p$

nul sur cette partie

d^r $E^r_{p,q}$ si l'ordre de la diff. d^r est $> p$, on obtient 0.

II I quadrant d^r $E^r_{p,q}$ III IV d^{r+1}

Pour une suite spectrale du quadrant I, on ~~...~~ $\sup(p,q)$.

(1) a : $r > p \Rightarrow d^r_{p,q} = 0$
$r > q-1 \Rightarrow d^r_{p+r, q-r+1}$ et $r > \sup(p, q-1) \Rightarrow E^r_{p,q} = E^{r+1}_{p,q}$

stationnaire à partir d'1 certain rang.

Dans la situation ①, on pose $E^{\infty}_{p,q} = E^{r}_{p,q}$ (r assez grand)

Théorème de convergence : Dans la situation $\begin{cases} A^{r}_{p,q} = H_{p+q}(F_p) \\ E^{1}_{p,q} = H_{p+q}(F_p, F_{p-1}) \end{cases}$, en notant

$gr_p(H_*(X)) = F_pH_*(X) / F_{p-1}H_*(X)$ $\qquad F_pH_*(X) = \mathrm{Im}(H_*(F_p) \to H_*(X))$

et avec l'hypothèse ①, on a $\boxed{E^{\infty}_{p,q} = gr_p(H_{p+q}(X))}$ = "gradué associé à l'homologie de X"

(ie si $E^{r}_{p,q}$ est stationnaire pour $r \to +\infty$, p,q fixé)

Exemple : Homologie d'un CW-complexe

Un CW-complexe est un espace $X = \bigcup X^{(p)}$, réunion croissante, où

$X^{(p+1)} = X^{(p)} \cup (\dot{\bigcup}_{i \in I_{p+1}} e^{p+1}_i)$ (attachement selon le bord de des cellules)

$X^{(0)}$ discret

$\ell_p : \dot{\bigcup} S^p_i \longrightarrow X^{(p)}$ = application d'attachement

$\dot{\bigcup} e^{p+1}_i \longrightarrow$ Somme amalgamée $X^{(p+1)} = X^{(p)} \cup (\dot{\bigcup} e^{p+1}_i) / \sim_{\ell_p}$

muni de la topologie : U ouvert ssi son intersection avec toute cellule est un ouvert de la cellule

Une structure de CW-complexe muni d'une topo. canonique est la donnée de cellules et d'opérations d'attachement de cellules selon le bord.

ex: $\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) = \overbrace{\underbrace{S^2 \cup e^4 \cup e^6 \cup \ldots}_{\text{hyperplan à l'}\infty}}^{\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})} \cup e^{2n}$

$S^{2n-1} \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ attachement.

} CW-finie, qui sont compacts

$\mathbb{P}^{\infty}(\mathbb{C}) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ topologie de la réunion (A fermé $\Leftrightarrow$ $A \cap \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ fermé $\forall n$)

CW de type fini si I_{p+1} est un ensemble fini $\forall p$

CW de dim fini $X^{(p)} = X$ si p assez grand.

(C6) Homologie des fibrés

Il s'agit de fibrés localement triviaux $p : E \to B$: $\forall b \in B$ $\exists U \in \mathcal{O}_b$ ($\mathcal{O}_b$ = ens des vois. ouv. de b dans B) tel que le diag suiv soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U) & \xrightarrow{\sim} & p^{-1}(b) \times U \\ & p \searrow \quad \swarrow pr_2 & \\ & U & \end{array}$$

Dans la pratique, on utilise essentiellement la propriété de relèvement des homotopies. On désignera par fibration une appl continue $p : E \to B$ telle que :

FIBRATION = (PRH) " Si $F : X \times I \to B$ est une homotopie de $f_0 : X \to B$ à $f_1 : X \to B$, et si f_0 se relève en une appl cont. $g_0 : X \to E$, ($p g_0 = f_0$) alors $\exists\, G : X \times I \to E$ qui relève F, ie $p \circ G = F$ "

$$\begin{array}{ccc} X \times \{0\} & \xrightarrow{g_0} & E \\ \downarrow & \nearrow G & \downarrow p \\ X \times I & \xrightarrow{F} & B \end{array}$$

<u>Théorème</u> : Si B est paracompact, une fibration locale (ie $\forall b\ \exists U$ $p|_{p^{-1}(U)} : p^{-1}(U) \to U$ soit une fibration) est une fibration.
vérifie PRH

Une projection d'un produit est une fibration, et donc une fibration local. triviale est une fibration.

ex : fibrations loc. triviales : $S^1 \hookrightarrow S^{2n+1} \to \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ $\quad S^3 \hookrightarrow S^{4n+3} \to \mathbb{P}^n(\mathbb{H})$ $\quad S^0 \hookrightarrow S^n \to \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$

Si H s-groupe de Lie de G $\quad H \subset G \to G/H$

$SO(n) < SO(n+1) \to S^n$

$* \in X$

ex : $\Omega X \hookrightarrow EX \subset \mathcal{C}([0,1], X) \xrightarrow{p} X$ $\quad p(\lambda) = \lambda(0)$

$EX = \{\lambda \in \mathcal{C}([0,1], X) \mid \lambda(1) = *\}$
= espace contractible

(schéma : X, $*$, λ, $p(\lambda)$)

ΩX = ens. des lacets en x.

ex : $\mathcal{C}([0,1], X) \xrightarrow{(ev(0), ev(1))} X \times X$ ($ev(0)$ = évaluation en 0)

$\lambda \longmapsto (\lambda(0), \lambda(1))$ est une fibration de fibre ΩX.

Supposons que B soit un CW-complexe :

$$\begin{array}{c} E \\ \downarrow p \\ B = * \cup Ve^1 \cup Ve^2 \cup \ldots \cup V_{c_k} e^k \cup \ldots \end{array}$$

(la partie $* \cup \ldots \cup V_{c_k}e^k$ étant $B^{(k)}$)

(c_k = ensemble des indices des cellules de dimension k.) (nbre)

On a 1 filtration $B^{(0)} = * \subset B^{(1)} \subset \ldots \subset B^{(k)} \subset \ldots$ $\quad B^{(k+1)} = B^{(k)} \cup Ve^{k+1}$

La structure du CW-complexe, ie la donnée des cellules et de l'attachement d'icelles permet de définir entièrement l'homologie de B.

$$H_*(B^{(k)}, B^{(k-1)}) \underset{\text{excision}}{=} H_*(\dot\cup e^k, \dot\cup S^{k-1}) \quad \text{coeff dans } \mathbb{Z}$$

$$\| \qquad \oplus H_*(e^k, S^{k-1}) = \mathbb{Z}^{(c_k)}$$

On pose $\begin{cases} \mathcal{C}_k(B;\mathbb{Z}) \doteq H_*(B^{(k)}, B^{(k-1)}) = \mathbb{Z}^{(c_k)} \\ \partial : H_*(B^{(k)}, B^{(k-1)}) \xrightarrow{(-1)} H_*(B^{(k-1)}, B^{(k-2)}) \end{cases}$ (= bord du triple $B^{(k-2)} \subset B^{(k-1)} \subset B^{(k)}$)

$\partial : \mathcal{C}_k(B;\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathcal{C}_{k-1}(B;\mathbb{Z})$

(en marge : $\partial : \to H_*(B^{(k-1)}) \xrightarrow{H_*(j)} H_*(B^{(k-1)}, B^{(k-2)}) \to H_*(B^{(k-2)}) \xrightarrow{\partial} H_*(B^{(k-2)}, B^{(k-3)})$, j inclusion)

1) ∂ est une différentielle (composée nulle (suite de la paire))

2) $\boxed{H_*(\mathcal{C}_\cdot(B;\mathbb{Z}), \partial) = H_*(B;\mathbb{Z})}$

NB : ∂ est le bord d'un couple exact $\begin{cases} A_k = H_*(B^{(k)}) \\ E_k = H_*(B^{(k)}, B^{(k-1)}) \end{cases}$

$$H_n(B^{(k-1)}) \longrightarrow H_n(B^{(k)}) \longrightarrow H_n(B^{(k)}, B^{(k-1)}) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(B^{(k-1)}) \longrightarrow \ldots$$

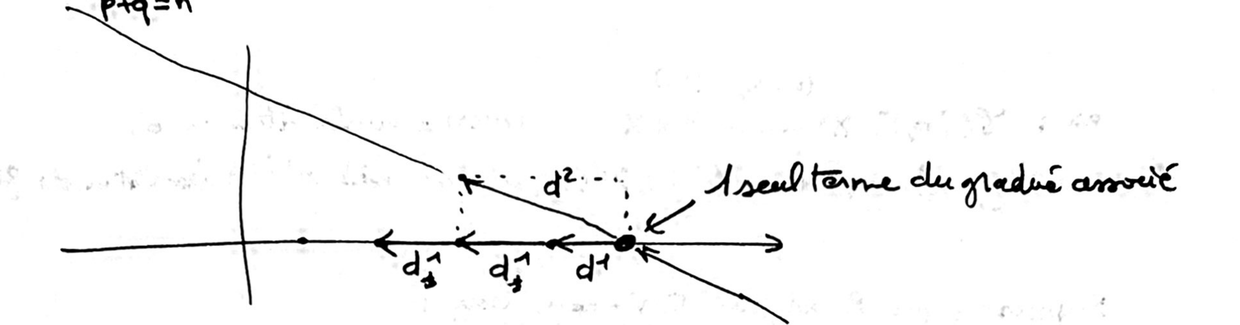
on pose $\begin{cases} A_{p,q} = H_{p+q}(B^{(p)}) \\ E_{p,q} = H_{p+q}(B^{(p)}, B^{(p-1)}) \end{cases}$ pour avoir un couple exact :

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow[i]{(-1,-1)} & A \\ {\scriptstyle (-1,0)}\ \nwarrow k & & \swarrow j\ {\scriptstyle (0,0)} \\ & E & \end{array}$$

E de bord jk

L'homologie du couple exact (A, E, i, j, k) est égal à l'homologie du CW-complexe

On a calculé $H_*(B^{(k)}, B^{(k-1)})$, ...



$$E^1_{p,q} = H_{p+q}(B^{(p)}, B^{(p-1)})$$

$$E^\infty_{p,q} = \frac{F_p H_{p+q}(B)}{F_{p-1} H_{p+q}(B)} \qquad \text{(Th. des suites spectrales)}$$

et le dessin donne $E^2 = E^\infty_{p,q}$

Donc $E^2 = E^\infty_{p,q} = \frac{F_p H_{p+q}(B)}{F_{p-1}H_{p+q}(B)} = \begin{cases} H_p(B) & \text{si } q=0 \\ 0 & \text{si } q \neq 0 \end{cases}$

<u>Ccl</u> : des 2) derniers, $H_*(B;\mathbb{Z}) = H_*(\mathcal{C}(B;\mathbb{Z}), \partial)$
$\qquad\qquad\qquad\qquad \| \qquad\qquad\qquad \|$
$\qquad\qquad\qquad\quad E^\infty_{*,0} \qquad\qquad\quad E^2_{*,0}$

<u>NB</u> : En particulier, on obtient l'homologie de $\mathbb{P}^n\mathbb{C}$ = CW-complexes.

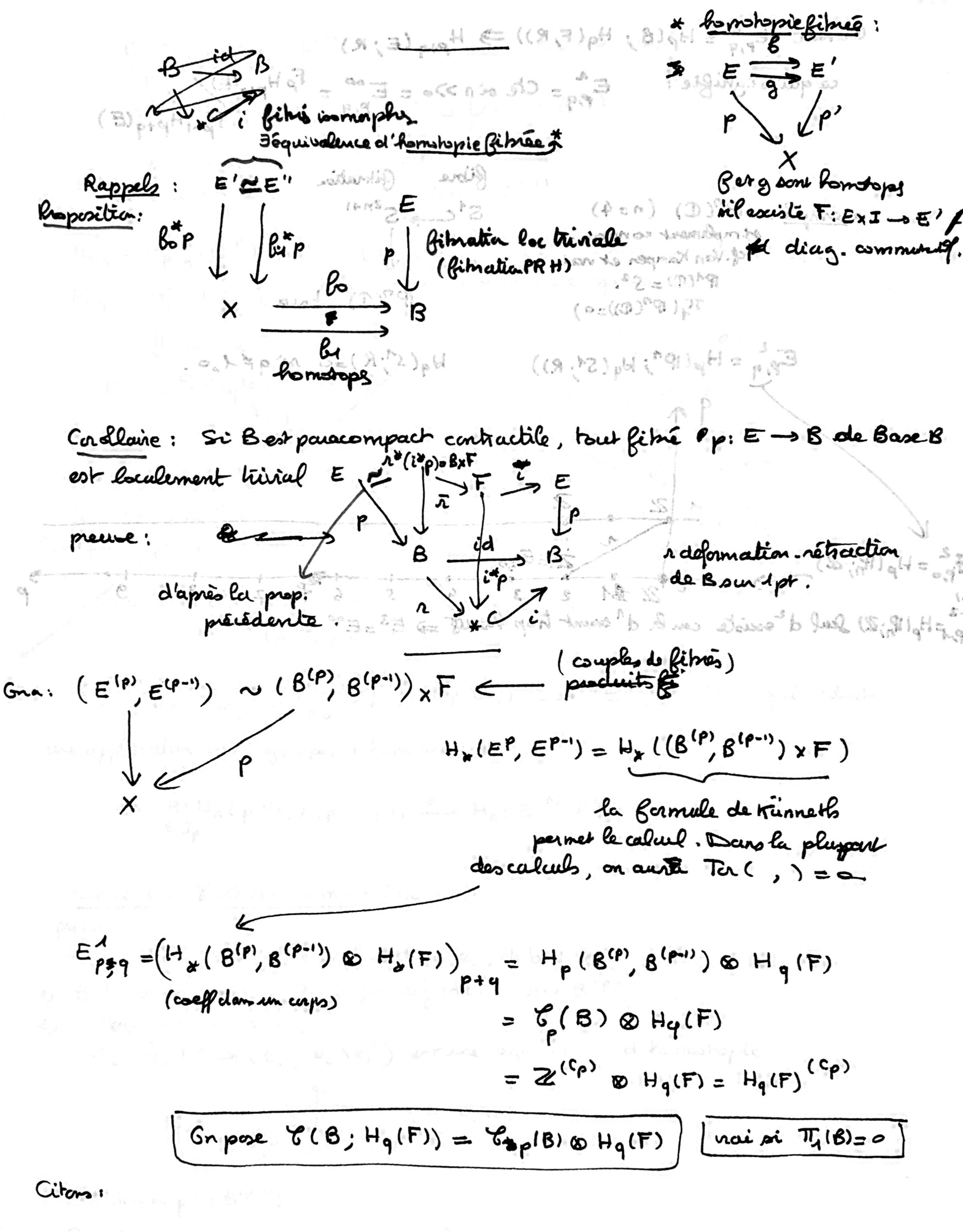
<u>Retour</u> : $E = \bigcup E^{(k)}$ où $E^{(k)} = p^{-1}(B^{(k)})$

$\downarrow$

$B = \bigcup_k B^{(k)} \qquad \mathcal{C}_\cdot(B) = H_*(B^{(k)}, B^{(k-1)})$

On obtient les suites spectrales $\left(E^1_{p,q} = H_{p+q}(E^{(p)}, E^{(p-1)})\right)$ bigraduée homologique

Donc th (SS) $E^\infty = \frac{F_p H_{p+q}(E)}{F_{p-1} H_{p+q}(E)}$



* homotopie fibrée : f et g sont homotopes s'il existe $F : E\times I \to E'$ / diag. commutatif.

$$\begin{array}{ccc} E & \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} & E' \\ & p \searrow \quad \swarrow p' & \\ & X & \end{array}$$

$B \overset{id}{\to} B$, $* \to C$, i : fibrés isomorphes

Équivalence d'homotopie fibrée *

Rappels : $E' \simeq E''$

Proposition :

$$\begin{array}{ccc} E' \simeq E'' & & E \\ b_0^* p \downarrow \quad \downarrow b_1^* p & & \downarrow p \\ X & \overset{b_0}{\underset{b_1}{\rightrightarrows}} & B \end{array}$$

b_0, b_1 homotopes

p : fibration loc triviale (fibration PRH)

Corollaire : Si B est paracompact contractile, tout fibré $p : E \to B$ de base B est localement trivial.

preuve : d'après la prop. précédente.

$$\begin{array}{ccccc} E & \overset{\simeq}{\to} r^*(i^*p) = B\times F & \overset{\bar r}{\to} F & \overset{\bar i}{\to} & E \\ & p \searrow \quad \downarrow & \downarrow & & \downarrow p \\ & B & \overset{id}{\longrightarrow} & & B \\ & r \searrow & \downarrow i^*p & \nearrow i & \\ & & * & & \end{array}$$

r déformation-rétraction de B sur 1 pt.

On a : $(E^{(p)}, E^{(p-1)}) \sim (B^{(p)}, B^{(p-1)}) \times F$ ← (couples de fibrés produits)

$$H_*(E^p, E^{p-1}) = H_*((B^{(p)}, B^{(p-1)}) \times F)$$

la formule de Künneth permet le calcul. Dans la plupart des calculs, on aura $\mathrm{Tor}(\ ,\ ) = 0$

$$E^1_{p,q} = \left(H_*(B^{(p)}, B^{(p-1)}) \otimes H_*(F)\right)_{p+q} = H_p(B^{(p)}, B^{(p-1)}) \otimes H_q(F)$$

(coeff dans un corps)

$$= \mathcal{C}_p(B) \otimes H_q(F)$$

$$= \mathbb{Z}^{(C_p)} \otimes H_q(F) = H_q(F)^{(C_p)}$$

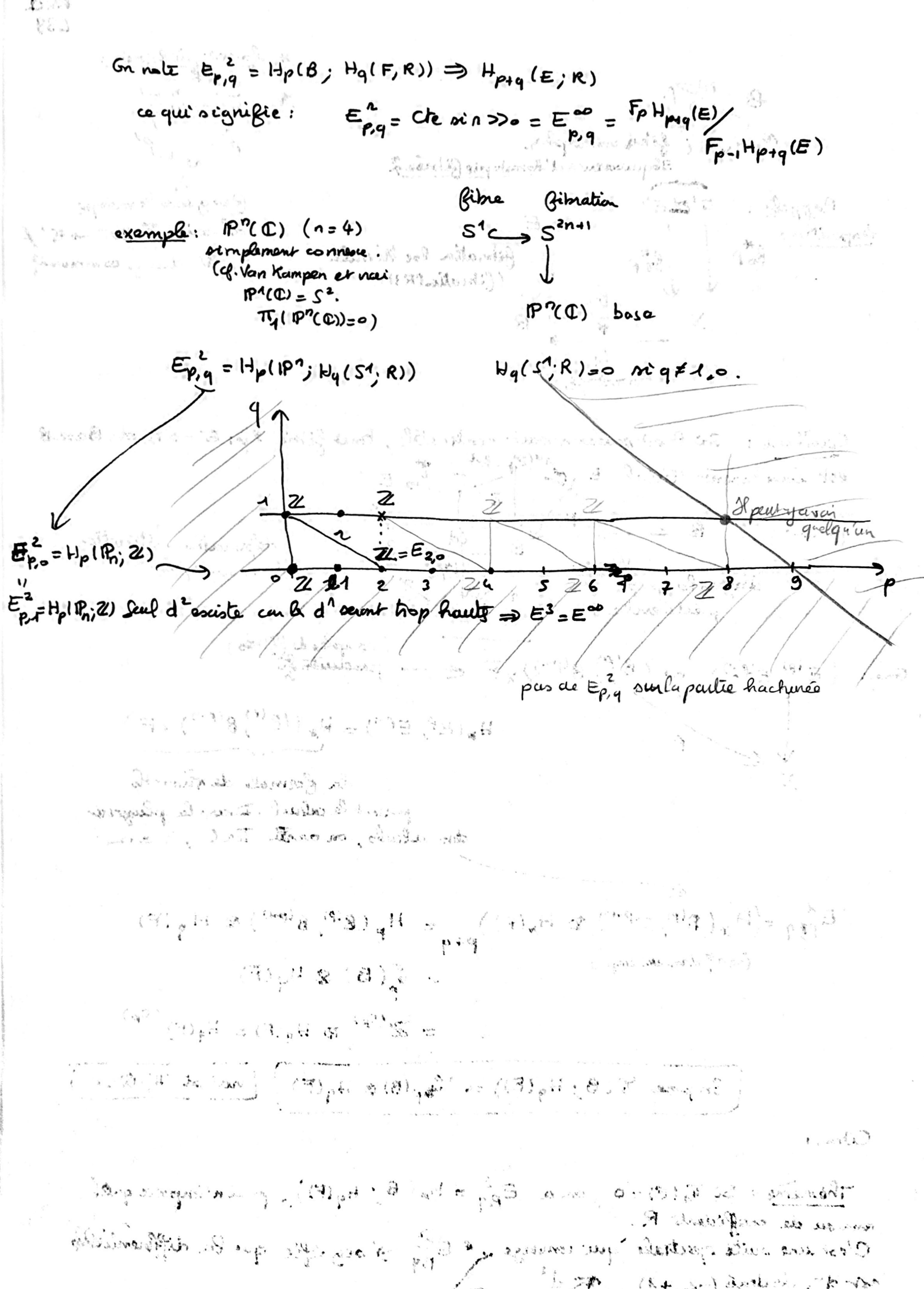
On pose $\mathcal{C}(B ; H_q(F)) = \mathcal{C}_p(B) \otimes H_q(F)$ | vrai si $\pi_1(B) = 0$

Citons :

Théorème : Si $\pi_1(B) = 0$, on a $E^2_{p,q} = H_p(B ; H_q(F))$, pour n'importe quel anneau de coefficients R.

C'est une suite spectrale qui converge vers $H_{p+q}(E ; R)$. $E^{(2)}_{p,q}$ signifie que la différentielle est d^2, de degré $(-2, +1)$

[diagramme : d^2, $+1$, -2]


On note $E^2_{p,q} = H_p(B; H_q(F,R)) \Rightarrow H_{p+q}(E;R)$
ce qui signifie : $E^n_{p,q} =$ Cte si $n \gg 0$ $= E^\infty_{p,q} = F_pH_{p+q}(E) / F_{p-1}H_{p+q}(E)$
fibre
fibration
exemple : $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ $(n=4)$
simplement connexe.
(cf. Van Kampen et vrai
$\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = S^2$.
$\pi_1(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}))=0$)
$S^1 \hookrightarrow S^{2n+1}$
$\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ base
$E^2_{p,q} = H_p(\mathbb{P}^n; H_q(S^1;R))$
$H_q(S^1;R)=0$ si $q \neq 1,0$.
q
1
$\mathbb{Z}$
$\mathbb{Z}$
2
$\mathbb{Z} = E_{2,0}$
$\mathbb{Z}$
$\mathbb{Z}$
Il peut y avoir quelqu'un
$E^2_{p,0} = H_p(\mathbb{P}_n; \mathbb{Z})$
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 p
$E^2_{p,1} = H_p(\mathbb{P}_n;\mathbb{Z})$ seul d^2 existe car les d^n seront trop hauts $\Rightarrow E^3 = E^\infty$
pas de $E^2_{p,q}$ sur la partie hachurée

$E \supset p^{-1}(B^{(n)}) \doteqdot E^{(n)}$ $\qquad$ $B =$ CW-complexe

$\downarrow p$

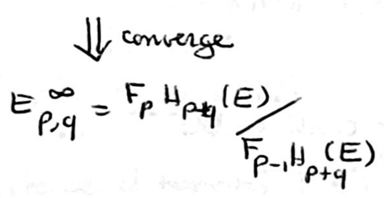
$\underbrace{B \supset B^{(n)} \supset B^{(n-1)}}$ $\qquad$ $B^{(n-1)} \cup \bigcup_{i \in J_n} e_i^n = B^{(n)}$

filtration can. du CW-compl $\qquad$ $\begin{cases} b_0 = B^{(0)} \\ F = p^{-1}(b_0) = E^{(0)} \end{cases}$

$A^1_{p,q} = H_{p+q}(E^{(p)})$

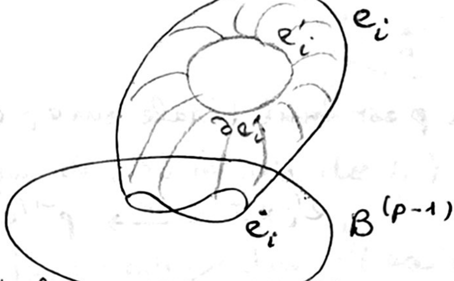
$E^1_{p,q} = H_{p+q}(E^{(p)}, E^{(p-1)})$

$(E^{(n)})_n$ est la filtration réciproque de $(B^{(n)})_n$ et donne naissance à une suite spectrale



$\Downarrow$ converge

$$E^\infty_{p,q} = F_p H_{p+q}(E) / F_{p-1} H_{p+q}(E)$$



$f_i : \partial e_i \longrightarrow B^{(p-1)}$ est l'opération d'attachement de la cellule e_i

On pose $\dot{e}_i = f_i(\partial e_i)$

On a l'inclusion : $\quad (e_i, \dot{e}_i) \hookrightarrow (B^{(p)}, B^{(p-1)})$

En prenant l'image réciproque par p, on obtient l'inclusion

$$(p^{-1}(e_i), p^{-1}(\dot{e}_i)) \hookrightarrow (E^{(p)}, E^{(p-1)})$$

d'où une application $\quad \bigcup_i (p^{-1}(e_i), p^{-1}(\dot{e}_i)) \longrightarrow (E^{(p)}, E^{(p-1)})$ $\quad$ qui induit

une application entre groupes d'homologie :

$$\bigoplus_{i \in J_p} H_n(p^{-1}(e_i), p^{-1}(\dot{e}_i)) \xrightarrow{\ \gamma\ } H_n(E^{(p)}, E^{(p-1)})$$

<u>lemme 1</u> : <u>γ est un isomorphisme</u>.

preuve

Soit e_i' une boule fermée incluse dans e_i, de bord $\partial e_i'$. Alors :

1) $B^{(p-1)} \cup (e_i \setminus e_i')$ se rétracte par déformation sur $B^{(p-1)}$

2) ~~[illegible] $\hookrightarrow (e_i,$~~

$(e_i, \dot{e}_i) \hookrightarrow (e_i, e_i \setminus \mathring{e}_i')$ est une équivalence d'homotopie

$\uparrow$ excision de $e_i \setminus e_i'$

$(e_i', \partial e_i')$

De m. avec $p^{-1}(B^{(p-1)})$

Par suite :

$$\begin{array}{ccc}
\oplus H_n(p^{-1}(e_i), p^{-1}(\dot{e}_i)) & \xrightarrow{\gamma} & H_n(E^{(p)}, E^{(p-1)}) \\
\downarrow \simeq \text{ (type d'homotopie)} & & \downarrow \text{induit par l'inclusion} \simeq \text{axiome d'homotopie} \\
\oplus H_n(p^{-1}(e_i), p^{-1}(e_i \setminus \mathring{e}'_i)) & \longrightarrow & H_n(E^{(n)}, E^{(n)} \setminus \bigcup p^{-1}(\mathring{e}'_i)) \\
\uparrow \simeq \text{ excision} & & \uparrow \simeq \text{ excision} \\
\bigoplus_{i \in J_p} H_n(p^{-1}(e'_i), p^{-1}(\partial e'_i)) & \xrightarrow[=]{} & H_n\left(\bigsqcup_{i \in J_p} (p^{-1}(e'_i), p^{-1}(\partial e'_i))\right)
\end{array}$$

CQFD

La fibration p est ~~local.~~ triviale sur e'_i car la base est contractible :

$$\begin{array}{ccc}
e'_i \times F & \xrightarrow{\sim} & p^{-1}(e'_i) \\
& \searrow^{pr_1} & \downarrow p \\
& & e'_i \\
& & \text{contractible}
\end{array}$$

Donc $H_*(p^{-1}(e'_i), p^{-1}(\partial e'_i)) = H_*(e'_i \times F, \partial e'_i \times F) = H_{n-p}(F)$ (Künneth)

puisque $H_*(e'_i, \partial e'_i) = \begin{cases} \mathbb{Z} \text{ si } * = p \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

Donc $\bigoplus_{i \in J_p} H_n(p^{-1}(e'_i), p^{-1}(\partial e'_i)) = \bigoplus_{i \in J_p} H_{n-p}(F)) = (H_{n-p}(F))^{(J_p)}$

Donc : $E^1_{p,q} = H_{p+q}(E^{(p)}, E^{(p-1)}) = \underbrace{H_p(B^{(p)}, B^{(p-1)}) \otimes H_{n-p}(F)}_{?} \doteq \mathcal{C}_p(B; H_q(F))$

<u>Théorème</u> : Si la fibration est orientable, le carré suivant commute :

$$\begin{array}{ccc}
H_p(B^{(p)}, B^{(p-1)}) \otimes H_q(F) & \xrightarrow{\Psi_{p,q}} & H_{p+q}(E^{(p)}, E^{(p-1)}) = E^1_{p,q} \\
\partial^1 \otimes id_{H_q(F)} \downarrow & & \downarrow d^1 \\
H_{p-1}(B^{(p-1)}, B^{(p-2)}) \otimes H_q(F) & \xrightarrow{\Psi_{p-1,q}} & H_{p+q-1}(E^{(p-1)}, E^{(p-2)}) = E^1_{p-1,q}
\end{array}$$

Alors ~~Donc~~ : (où $d^1 = j \circ k$) $\quad H_p(B; H_q(F)) \simeq E^2_{p,q}$ (Serre)

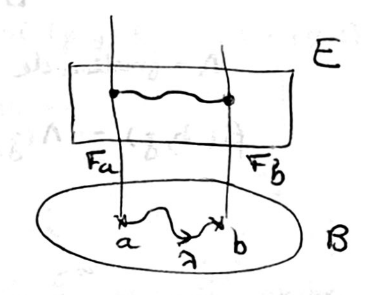
idées de la démonstration :

Fibration orientable :

Une fibration $p : E \to B$ ~~stg~~ est une application continue qui possède la propriété PRH de relèvement des homotopies. Elle relève donc les chemins, et en fait :

p est une fibration ssi $\exists \Lambda : W \longrightarrow E^I$ $\quad W = E \times_B B^I = \{(x,\lambda) \in E \times B^I / p(x) = \lambda(0)\}$

$I = [0,1]$ telle que $\begin{cases} \Lambda(x,\lambda)(0) = x \\ \forall t \quad p(\Lambda(x,\lambda)(t)) = \lambda(t) \end{cases}$



$f_\lambda : F_a \longrightarrow F_b$ s'appelle une
$x \longmapsto \Lambda(x,\lambda)(1)$

application admissible

La classe d'homotopie $[f_\lambda]$ ne dépend que de $[\lambda]$ (et non de Λ)

Définition : Une application $f : F_a \longrightarrow F_b$ est admissible s'il existe $[\lambda] \in \pi(a,b)$ tel que $[f] = [f_\lambda]$.

1) La composée de 2 appl. admissible en est une
2) Toute application admissible est une équivalence d'homotopie et son inverse est admissible
3) Si B est connexe par arcs, il existe une application admissible entre 2 fibres F_a et F_b quelconques.
4) Si f est admissible, $(f_\lambda)_* : H_*(F_a) \longrightarrow H_*(F_b)$ ne dépend que de la classe d'homotopie de λ.

Définition : On dit que la fibration $p : E \to B$ de base B connexe par arcs est orientable ~~et~~ si $\exists b$ (ou $\forall b$) $\forall \omega \in \pi_1(B,b)$ $(f_\omega)_* = id_{H_*(F_b)}$

Si la fibration est orientable et si f est admissible, $f_* : H_*(F_a) \longrightarrow H_*(F_b)$ ne dépend pas de $[\lambda]$. On peut donc identifier canoniquement les groupes d'homologie des fibres $H_*(F_b)$.

Proposition : Si $\pi_1(B) = 0$, toute fibration est orientable.

Définition : Relèvement admissible d'une application

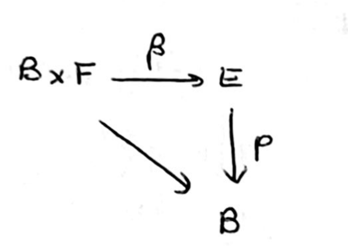
$$\begin{array}{ccc} X \times F & \xrightarrow{\tilde{\alpha}} & E \\ \downarrow pr_1 & & \downarrow p \\ X & \xrightarrow{\alpha} & B \end{array}$$

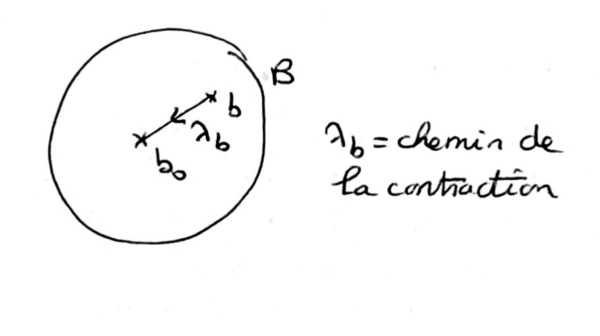
Soit $p : E \to B$ une fibration et $\alpha : X \longrightarrow B$ continue, soit $b_0 \in B$ et $F = p^{-1}(b_0)$. On suppose B connexe.

$\forall x \in X, \quad F \xrightarrow{\tilde{\alpha}_x} p^{-1}(\alpha(x)) = F_{\alpha(x)}$
$\qquad z \longmapsto \tilde{\alpha}(x,z)$

$\tilde{\alpha}$ est un relèv. admissible de α si $\forall x$ $\tilde{\alpha}_x$ est admissible, où $\tilde{\alpha}_x$ est définit ci-contre :

ex : Si B contractile sur b_0,





Λ = fonction de relèvement de chemin pour p

$\beta(b, z) = \Lambda(z, \lambda_b)(1) = f_{\lambda_b}(z)$

<u>Proposition</u> : Si la fibration est orientable et si $\alpha : X \longrightarrow B$ admet un relèvement admissible, l'application

$$H_*(X) \otimes H_*(F) \xrightarrow{\bar{\alpha}_*} H_*(E)$$
$$\downarrow K = \text{Künneth} \qquad \nearrow \bar{\alpha}_*$$
$$H_*(X \times F)$$

ne dépend que de α (et non du relèvement)

(en exercice)

<u>Corollaire</u> : Si la fibration est orientable, $\varphi_{p,q}$ ne dépend que de la structure du CW-complexe B.

preuve : φ_{pq} est du type du $\bar{\alpha}_*$ de la prop. ci-dessus.

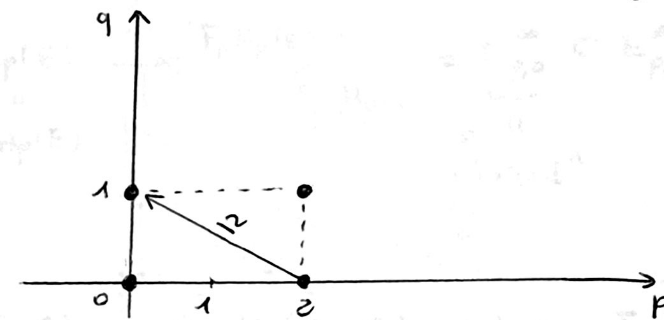
Comme φ_{pq} est naturelle, le diagrame du Th plus commute.

---

exemple : Suite spectrale de la fibration de Hopf

$$S^1 \longrightarrow S^3 \subset \mathbb{C}^2 = \mathbb{R}^4$$
$$\downarrow$$
$$S^2 = \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$$

$E^2_{p,q} = H_p(S^2; H_q(S^1))$ d'après le Th. préc. $= \begin{cases} \mathbb{Z} \text{ si } (p,q) \in \{0,2\} \times \{0,1\} \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$



$E^3 = E^\infty$ car d^3 tombe toujours sur 0.

<u>Remarque</u> : L'isomorphisme $H_p(B, H_q(F)) \xrightarrow{\sim} E^2_{p,q}$ est naturel, ie

si j'ai un morphisme de fibration

fibres $\{ F' \longrightarrow F$

$$\begin{array}{ccc} E' & \xrightarrow{F} & E \\ p' \downarrow & & \downarrow p \\ B' & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

ou si f est cellulaire (ie B, B' CW-complexes et f envoie 1 cellule sur 1 cellule)

alors :

$$\begin{array}{ccc} H_p(B; H_q(F)) & \xrightarrow{\simeq} & E^2_{p,q}(p) \\ \uparrow & & \uparrow \\ H_p(B'; H_q(F')) & \xrightarrow{\simeq} & E^2_{p,q}(p') \end{array}$$

est commutatif.

Si
$$\begin{array}{ccc} E_n & \longrightarrow & S^3 \\ n^*H \downarrow & & \downarrow H = \text{fib. de Hopf} \\ S^2 & \xrightarrow{\times n} & S^2 \end{array}$$
$(n \neq 0)$

Calculer l'homologie de E_n ? On utilise la naturalité de la suite spectrale.

$E^2_{p,q} = H_p(S^2; H_q(S^1))$ (même terme)

$=$ [diagramme : $\mathbb{Z}$ en $(0,0)$, $(0,1)$, $(2,0)$, $(2,1)$, d_2 de $(2,0)$ vers $(0,1)$; flèches $\times n$]

$=$ [diagramme : $\mathbb{Z}$ en $(0,0)$, $(0,1)$, $(2,0)$, $(2,1)$, $\times n$ de $(2,0)$ vers $(0,1)$]

car $H_0(S^2, \mathbb{Z}) \xrightarrow{=} H_0(S^2, \mathbb{Z})$

$H_2(S^2, \mathbb{Z}) \xrightarrow[\times(\pm n)]{} H_2(S^2, \mathbb{Z})$

au niveau 3

[diagramme : $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ en $(0,1)$, 0 en $(2,0)$]

$E^3_{p,q}$

Donc $\begin{cases} H_0(E_n) = \mathbb{Z} \\ H_1(E_n) = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \\ H_2(E_n) = 0 \end{cases}$ $H_3(E_n) = \mathbb{Z}$

Fibration :

$$\begin{array}{c} F \to E \\ \downarrow p \\ B \end{array}$$

d^ρ transgression (i^e différentielle qui traverse)

$(p,0)$

($E^r_{(p,0)}$ suites de coins ≠ seulement sur les axes de coordonnées)

$$E^2_{p,q} = H_p(B; H_q(F)) \Rightarrow H_{p+q}(E) \quad \text{converge.}$$

$$E^2_{p,0} \supset E^3_{p,0} \supset E^4_{p,0} \supset \dots \supset E^\rho_{p,0} \supset E^{\rho+1}_{p,0} = \operatorname{Ker} d^\rho = E^\infty_{p,0} = \overbrace{F_p H_p(E)}^{H_p(E)} / F_{p-1} H_p(E)$$

Donc $H_p(E) \twoheadrightarrow F_p H_p(E) / F_{p-1} H_p(E) = E^\infty_{p,0} \subset E^2_{p,0} = H_p(B; H_0(F; R))$

$H_p(E) = F_p H_p(E)$, $\quad E^\infty_{p,0} = \bigcap_{r=2}^{p} \operatorname{Ker} d^r$

diag (1): $H_p(E) \xrightarrow{H_p(p;R)} H_p(B;R)$, $\quad H_p(B; H_0(F;R)) \downarrow H_p(B;R)$

$H_0(F;R) \twoheadrightarrow R = H_0(*;R)$ induit par $F \to *$

$H_0(F;R) = R^{(\pi_0(F))}$

<u>Théorème</u> : <u>le diag. 1 est commutatif</u>

preuve : identification de coins.

$$\begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & * \\ \downarrow & & \downarrow \\ E & \xrightarrow{p} & B \\ p\downarrow & & \| \\ B & \longrightarrow & B \end{array}$$

Suite spectrale associée à cette fibration :

$$\begin{cases} E^2_{p,q} = H_p(B; H_q(*)) \\ E^2_{p,q} = 0 \quad \text{si } q \neq 0 \end{cases}$$

La naturalité de la suite spectrale à cette situation donne :

$$E^2_{p,q} = H_p(B; H_q(F)) \xrightarrow{\varphi^2_{p,q}} H_p(B; H_q(F)) = E^2_{p,q}$$

$$H_p(B; H_0(F)) \xrightarrow{\varphi^2_{p,0}} H_p(B; H_0(*))$$

$$\begin{array}{ccc} \cup & & \| \\ E^3_{p,0} & \longrightarrow & \\ \cup & & \| \\ \vdots & & \vdots \\ \cup & & \\ E^\infty_{p,q} & & \\ \| & & \| \end{array}$$

$$H_p(E) \longrightarrow F_p H_p(E) / F_{p-1} H_p(E) \xrightarrow{p_*} F_p H_p(B) / F_{p-1} H_p(B) = H_p(B)$$

(avec $H_p(p;R)$: $H_p(E) \to H_p(B; H_0(F))$)

(on fait de même pour $E^2_{p,q} = 0$ si $p \neq 0$) en avec

$$\begin{array}{ccc} & F & \\ \swarrow & & \searrow \\ F & \hookrightarrow & E \\ \downarrow & & \downarrow p \\ b_0 & \hookrightarrow & B \end{array}$$

En cohomologie ? On considérait la fibration $p : E \to B$ et les filtrations

$$\begin{array}{ccc} F \to E & \supset & E^{(k)} = p^{-1}(B^{(k)}) \\ \downarrow p & & \downarrow \\ B & \supset & B^{(k)} \end{array}$$

pour obtenir le couple exact $H_{p+q}(E^{(p-1)}) \longrightarrow H_{p+q}(E^{(p)})$ (écrire $H_*(E^{(p)})$!)

$$H_{p+q}(E^{(p-1)}) \longrightarrow H_{p+q}(E^{(p)}) \longrightarrow H_{p+q}(E^{(p)}, E^{(p-1)}) \xrightarrow{(-1)\,\partial} H_{p+q}(E^{(p-1)})$$

Ici : $H^*(E^{(p)}) \xrightarrow[i]{(-1,+1)} H^*(E^{(p-1)})$

$j\ \partial\ (+1,0)$: $H^*(E^{(p-1)}) \to H^*(E^{(p)}, E^{(p-1)})$, $k\ (0,0)$: $H^*(E^{(p)}, E^{(p-1)}) \to H^*(E^{(p)})$

($F^pH^{p+q}(E) = \ker j^{(p)}$

$H^{p+q}(E, E^{(p)}) \to H^{p+q}(E) \xrightarrow{j^{(p)}} H^{p+q}(E^{(p)})$

donc $F^p \supset F^{p+1} \supset \dots$

on parlera donc de filtrations descendants)

$E_1^{p,q} = H^{p+q}(E^{(p)}, E^{(p-1)})$

(1) : n° d'ordre de la suite spectrale

d_r = différentielle au rang r = $j_r \circ k_r$ où $j_r = j \circ i^{1-r}$

donc le degré de d_r est $(r, 1-r)$

(p,q) — d_r → $p+r, q+1-r$

d_2 est $(2,-1)$

Il existe une structure d'algèbre sur toute la suite spectrale $E_r^{p,q}$ $r \geq 2$.
C'est 1 structure d'algèbre bigraduée(*) pour laquelle les différentielles sont des dérivations.

‖ **Théorème** (admis) : $E_2^{p,q} = H^p(B ; H^q(F;R))$ si la fibration est orientable
où R est un anneau (ie une $\mathbb{Z}$-algèbre)

$$H^p(B, H^q(F)) \otimes H^{p'}(B, H^{q'}(F))$$
$$\downarrow \cup$$
$$H^{p+p'}(B, H^{q+q'}(F))$$

est défini grâce à l'application bilinéaire :

$H^q(F;R) \otimes H^{q'}(F;R) \xrightarrow{\cup} H^{q+q'}(F;R)$ est le cup-produit pour F

[(*) le produit d'1 él de indice (p,q) avec (p',q') est d'indice $(p+p', q+q')$]

De plus, la différentielle est une dérivation
$\forall\, a \in H^p(B, H^q(F))$
$\forall\, b \in H^{p'}(B, H^{q'}(F))$ $\quad d_2(a \cup b) = (d_2 a) \cup b + (-1)^{p+q} a \cup d_2 b$
donc $E_2^{*,*}$ est une algèbre différentielle bigraduée, donc $E_3^{*,*} = H(E_2, d_2)$ est une algèbre bigraduée avec d_3 induite par d_2, etc...

$E_r^{*,*}, d_r$ est une alg. diff. bigraduée. E_∞ est une alg. bigraduée qui est le gradué associé à $H^*(E)$ laquelle est munie d'une filtration d'algèbre.
On dit que l'<u>algèbre A est filtrée</u> si $F^pA \supset F^{p+1}A \supset \dots$ est une filtration descendante telle que $F^pA . F^qA \subset F^{p+q}A$

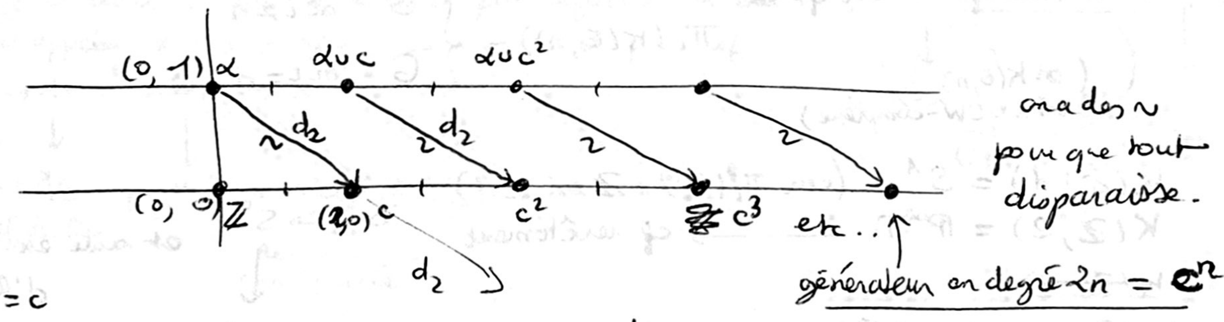
(NB : Les séries formelles forment 1 algèbre, graduée par la valuation $v(\sum_{i=p}^{+\infty} a_i x^i) = p$ si $a_p \neq 0$, et le gradué associé n'est autre que l'ens. des polynômes)

Exemples d'application :

1°) $H^*(\mathbb{P}^\infty\mathbb{C}; \mathbb{Z})$

$S^1 \longrightarrow S^\infty \sim *$
$\downarrow$
$\mathbb{P}^\infty\mathbb{C}$

$H^p(\mathbb{P}^\infty\mathbb{C}; H^q(S^1; R))$
$\shortparallel$
$E_2^{p+q}(\mathbb{P}^\infty\mathbb{C}; H^q(S^1, \mathbb{Z})) \Rightarrow H^{p+q}(S^\infty) = \mathbb{Z}_{(0,0)}$



$d_2\alpha = c$
$\begin{cases} \alpha \in H^0(\mathbb{P}^\infty\mathbb{C}; H^1(S^1)) = \text{fcts loc. constantes de } \mathbb{P}^\infty\mathbb{C} \to H^1(S^1) \\ c \in H^2(\mathbb{P}^\infty\mathbb{C}; H^0(S^1)) = \text{fcts} \end{cases}$
donc $\alpha \cup c \in H^2(\mathbb{P}^\infty\mathbb{C}; H^1(S^1))$ est un générateur de

$d_2(\alpha \cup c) = c \cup c \pm \alpha \cup \underset{\substack{\shortparallel \\ 0}}{d_2 c}$

à vérifier utiliser $H^n(\mathbb{P}^\infty\mathbb{C}; R) = H^n(\mathbb{P}^\infty\mathbb{C}) \otimes_{\mathbb{Z}} R$

$d_2(\alpha \cup c) \stackrel{\pm}{=} c^2$

etc...

<u>ccl</u> $H^n(\mathbb{P}^\infty\mathbb{C}; \mathbb{Z}) = \{$ ~~0 si n~~ impair

on note $\boxed{H^*(\mathbb{P}^\infty\mathbb{C}; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[c] \quad \text{où } |c| = 2}$

De même, $S^1 \longrightarrow S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$

$$\downarrow$$

$\mathbb{P}^n\mathbb{C}$

$S^1 \longrightarrow S^{2n+1} \subset \mathbb{R}^{2n+2} = \mathbb{C}^{n+1}$

$(x_0, y_0, \dots, x_n, y_n) \downarrow$ $\downarrow$

fixé. $[z_0, \dots, z_n]$ $\mathbb{P}^n\mathbb{C} = (\mathbb{C}^{n+1})^* / \sim$

$z_i = x_i + iy_i$

$$H^*(\mathbb{P}^n\mathbb{C}; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[c] / (c^{n+1} = 0)$$

Et $j : \mathbb{P}^n\mathbb{C} \hookrightarrow \mathbb{P}^\infty\mathbb{C}$ inclusion can. induit en cohomologie la surjection canonique :

$$j^* : H^*(\mathbb{P}^\infty\mathbb{C}; \mathbb{Z}) \twoheadrightarrow H^*(\mathbb{P}^n\mathbb{C}; \mathbb{Z})$$

De même $H^*(\mathbb{P}^\infty\mathbb{R}; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[w]$ (où $w \in H^1$)

29

Espaces d'Eilenberg - Mac Lane

admis || G = groupe abélien, Pour tout n, il existe un espace $K(G,n)$ (en fait un seul type d'homotopie) tel que

$$\pi_i(K(G,n)) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq n \\ G & \text{si } i = n \end{cases}$$

(si $K(G,n)$ est un CW-complexe)

$K(\mathbb{Z}; 1) = S^1$ (car $\pi_i(S^1) = \mathbb{Z}$ si $i = 1$)

$K(\mathbb{Z}; 2) = \mathbb{P}^\infty\mathbb{C}$ $\longrightarrow$ cf revêtement $S^1 \to S^\infty \downarrow \mathbb{P}^\infty\mathbb{C}$ et suite ex. longue d'homotopie

~~$K(\mathbb{Z}, 3)$~~

$K(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, 1) = \mathbb{P}^\infty\mathbb{R}$ $\longrightarrow$ même genre.

$$\mathbb{P}^1\mathbb{C} = S^2 \hookrightarrow \mathbb{P}^\infty\mathbb{C}$$

$$[X, K(G,n)] \longrightarrow H^n(X; G)$$
$$f \longmapsto f^*(id)$$

Théorème Hurewicz :

$$H_i(K(G,n)) = \pi_i(K(G,n)) = \begin{cases} 0 & i < n \\ G & i = n \end{cases}$$

pour $i \leq n$

$$f^* : H^n(K(G,n); G) \longrightarrow H^n(X; G)$$
$$id \longmapsto f^*(id)$$

$H^n(K(G,n); G)$

$\downarrow \simeq$ iso

$id \in \mathrm{Hom}(G, G)$ car $H_n(K(G,n)) = G$

} th. des coeff. universels

Théorème : L'application $[X, K(G,n)] \xrightarrow{\sim} H^n(X;G)$ est
$f \longmapsto f^*(id)$
un ~~isomorphisme~~ bijection naturelle en X.

On peut donc munir $[X, K(G,n)]$ d'une structure de groupe canonique, naturelle en X.

exercice : $S^2 = \mathbb{P}^1\mathbb{C} \hookrightarrow \mathbb{P}^\infty\mathbb{C}$
F fibre
(ou encore, ce qui revient presque au même :
$S^2 \longrightarrow K(\mathbb{Z},2)$ défini par $[S^2, K(\mathbb{Z},2)] = H^2(S^2;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \ni 1$)

Calculer la cohomologie de F.
(On peut calculer $\pi^4(S^3)$ grâce à $S^3\langle 3\rangle \longrightarrow S^3 \longrightarrow K(\mathbb{Z},3)$)

preuve du théorème :
(cf Spanier : corollaire de la théorie d'obstruction)
Autre méthode : Posons $h^n(X;G) = [X^+, K(G,n)]$ (X^+ = espace X pointé.)

si $n=0$ $\begin{cases} K(G,0) \doteq G \text{ muni de la topologie discrète} \\ [X, G] = \mathcal{C}(X,G) = G^{\pi_0(X)} = H^0(X;G) \end{cases}$

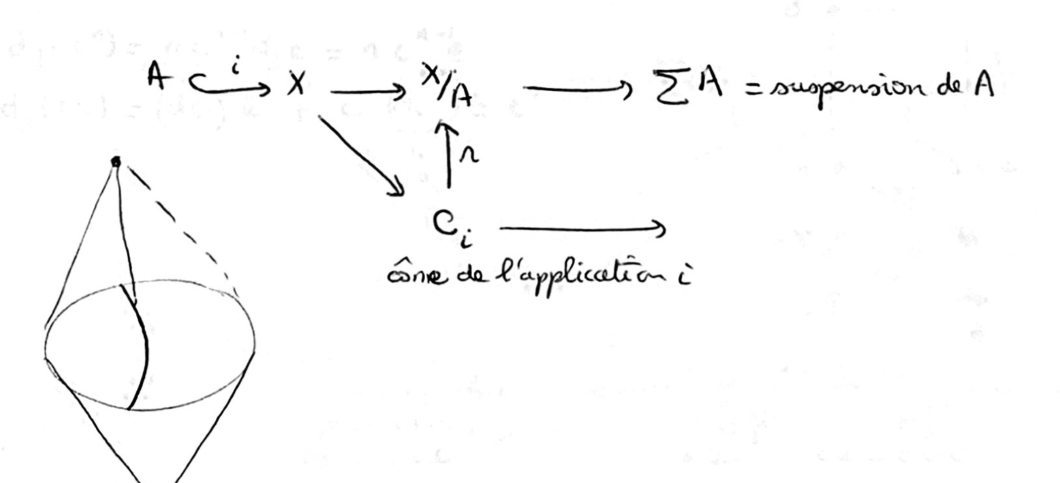
Posons $h^n(X,A;G) = [X/A, K(G,n)]$ pour A cofibration (A possède un voisinage U dans X qui se rétracte par déformation sur A)
On convient d'appeler $X \cup * = X/\emptyset$ où si l'on veut par déf.

on a :
$$\begin{array}{ccc} A & \hookrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ * & \longrightarrow & X/A \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \emptyset & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ * & \longrightarrow & X \cup * \doteq X/\emptyset \end{array}$$
déf de ↺ — réunion amalgamée

(schéma : X, U, A)

Définissons :
$h^n(X,A;G) \overset{\partial}{\longleftrightarrow} h^{n-1}(A;G)$
$[X/A ; K(G,n)]^{\cdot} \longleftrightarrow [A, K(G,n)]^{\cdot}$ (classes d'homotopies pointées)

$A \overset{i}{\hookrightarrow} X \longrightarrow X/A \longrightarrow \Sigma A$ = suspension de A
$X \searrow C_i$, $C_i \xrightarrow{r} X/A$, $C_i \longrightarrow$
cône de l'application i



On a : $A \hookrightarrow X \longrightarrow X/A \longrightarrow \Sigma A$

$\forall Z \quad [A,Z] \longleftarrow [X,Z] \longleftarrow [X/A, Z] \longleftarrow [\Sigma A, Z] = [A, \Omega Z]$

où $\Omega K(G,n) = K(G,n-1)$
si $Z = K(G,n)$

d'où ∂.

1) Exactitude :

$A \hookrightarrow X \longrightarrow X/A \longrightarrow \Sigma A \longrightarrow \Sigma X \longrightarrow \Sigma(X/A) \longrightarrow \Sigma^2 A \longrightarrow \dots$

$[A, K(G,n)] \longleftarrow [X, K(G,n)] \longleftarrow [\Sigma X/A, K(G,n)]$ etc...

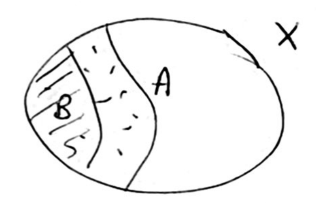
car $[\Sigma X, K(G,n)] = [X, \Omega K(G,n)] = [X, K(G,n-1)] = h^{n-1}(X;G)$

2) Homotopie (triviale)

3) Excision : $B \subset A \subset X \quad \bar{B} \subset \mathring{A}$ alors $X/A \simeq \frac{X \setminus B}{A \setminus B}$.

4) Dimension :

Ex S^2,



h^n satisfait les axiomes d'Eilenberg - Steenrod donc définit la théorie de la cohomologie unique. Il faudrait vérifier que le morphisme du th. est bien l'isomorphisme entre h^n et H^n

CQFD

Lemaire 10/3/83

Méthode du meurtre des groupes d'homotopie (1953 : Cartan–Serre)

(Hyp : On sait calculer $H_n(X)$ mais pas $\pi_n(X)$)

X = espace $(n-1)$-connexe $(n \geq 2)$

Th. Hurewicz $\Rightarrow$ $\pi_n(X) \xrightarrow{\simeq} H_n(X)$ est un isomorphisme.

$f \longmapsto f^*(id)$

Rappel : $[X, K(G,m)] \xrightarrow{\simeq} H^m(X ; G)$

(d'après ~~Künneth~~ Th. C.U. $H^m(K(G,m) ; G) \xrightarrow{\simeq} Hom(H_m(K(G,m)), G) \simeq Hom(G,G)$, $\ni id$

Par abus, $id \in H^m(K(G,m) ; G)$)

Posons $\pi_n = \pi_n(X)$. D'après le th. des C.U. (coeff. univ.)

$$H^n(X ; \pi_n) \xrightarrow{\simeq} Hom(H_n, \pi_n) = Hom(\pi_n, \pi_n) \quad \text{car } \pi_n = H_n$$

$H^n(X ; \pi_n) = [X, K(\pi_n, n)]$ $\xrightarrow{\Phi \text{ isomorphisme}}$ $\varphi : \pi_n \to \pi_n$

$f \longmapsto \pi_n(f) : \pi_n \to \pi_n$

On choisit $id_{\pi_n} \in [X, K(\pi_n,n)]$ en identifiant $[X, K(\pi_n,n)]$ et $Hom(\pi_n,\pi_n)$ par Φ.

$$X\langle n\rangle \longrightarrow X \xrightarrow{id_{\pi_n}} K(\pi_n, n)$$

fibre de id_{π_n} = "X rendu n-connexe".

La suite exacte d'homotopie donne $\begin{cases} \pi_i(X\langle n\rangle) = \pi_i(X) & i > n \\ \pi_i(X\langle n\rangle) = 0 & \text{si } i \leq n \end{cases}$

Alors, d'après le Th. d'Hurewicz $\pi_{n+1}(X\langle n\rangle) = H_{n+1}(X\langle n\rangle)$, donc $\boxed{\pi_{n+1}(X) = H_{n+1}(X\langle n\rangle)}$

ex : Calcul de $\pi_4(S^3)$

On a montré que $S^2\langle 2\rangle \sim S^3$ ("$\sim$" homotopiquement équivalent à)

$$S^3\langle 3\rangle \longrightarrow S^3 \longrightarrow K(\mathbb{Z},3)$$

$$\Omega K(\mathbb{Z},3) = K(\mathbb{Z},2) \longrightarrow * \longrightarrow K(\mathbb{Z},3)$$

($K(\mathbb{Z},2)$: cohomologie connue ; $K(\mathbb{Z},3)$: trouver sa cohomologie)

$$E^2_{p,q} = H^p(K(\mathbb{Z},3) ; H^q(K(\mathbb{Z},2))) \Rightarrow H^{p+q}(*) = \mathbb{Z}_{(0,0)}$$

convergence

$\begin{cases} K(\mathbb{Z},2) = P^\infty\mathbb{C} \text{ connu.} \\ H^*(K(\mathbb{Z},2)) = \mathbb{Z}[c], \ |c| = 2 \end{cases}$

$$d_3(c^n) = n c^{n-1} d_3 c = n c^{n-1} e$$

$$d_3(ce) = (dc)e + c\,(de) = e^2$$

($de = 0$)

Cette suite est exacte sinon il viendrait quelque chose en ∇ qui ne pourrait pas disparaître ensuite.

$0 \longrightarrow$ on a $\mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z} \longrightarrow E_3^{6,0} \longrightarrow 0$ exacte.

$\mathbb{Z} = E_3^{0,4}$, $\mathbb{Z} = E_3^{3,2}$

$\bullet\ \mathbb{Z}$ $\quad ce = c \cup e$ $\quad$ donc $2e^2 = 0$

($d_4 = 0$ car d_4 est définie sur le noyau de $H_3(d_3, -)$)

Alors $H^i(K(\mathbb{Z},3)) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } i=3 \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{si } i=6 \\ 0 & \text{si } i=1,2,4,5 \end{cases}$

Admis)

(Tous les groupes d'homologie qui interviennent sont des groupes abéliens de type fini)

$0 \to Ext(H_{n-1}(K),\mathbb{Z}) \longrightarrow H^n(K(\mathbb{Z},3)) \longrightarrow Hom(H_n(K(\mathbb{Z},3)) \longrightarrow 0$] Th. C.U.

donc Th C.U.

d'où l'intérêt de cette formule.

NB : alors $G = \mathbb{Z}^r \oplus F$ (torsion, fini) abélien

$\Downarrow$

$Hom(G,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^r$ libre

$Ext(G,\mathbb{Z}) = F$ fini

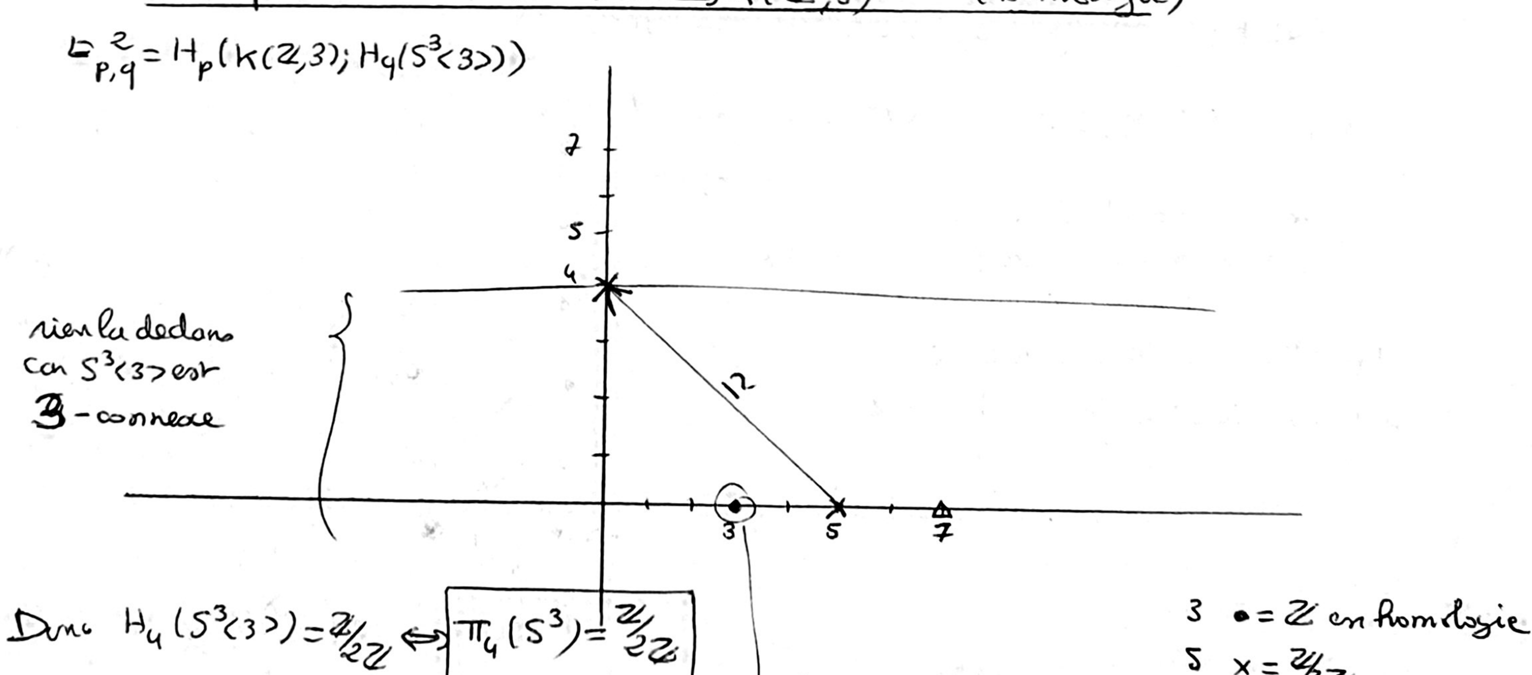
$H^n(K) =$ (Partie libre de $H_n(K)$) $\oplus$ (Partie finie de $H_{n-1}(K)$), d'après la remarque

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
H^n	$\mathbb{Z}$	0	0	$\mathbb{Z}$	0	0	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$
H_n	$\mathbb{Z}$	0	0	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$Tor H^7 = 0$	$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$	
○ = H^n est engendré par	(1)			(e)		(e^2)		(β)	

partie finie ↗ ↑ partie libre.

Suite spectrale de $S^3\langle 3\rangle \to S^3 \to K(\mathbb{Z},3)$ (Homologie)

$E^2_{p,q} = H_p(K(\mathbb{Z},3); H_q(S^3\langle 3\rangle))$



Donc $H_4(S^3\langle 3\rangle) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \Leftrightarrow$ $\boxed{\pi_4(S^3) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}$

(NB : $\pi_5(S^3) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$)

<u>Cohomologie de $K(\mathbb{Z},3)$</u> : Compliquée, de la p-torsion pour tous les p, facteurs libres plus loin ?

<u>Problème</u> : ① rang de $H_*(K(\mathbb{Z},3))$? ② Torsion de $H_*(K(\mathbb{Z},3))$? Déterminer $\inf\{n \,/\, Tor_p(H_n(K(\mathbb{Z},3))) \neq 0\}$? Sup $Exp_{(p)}\, H_n(K(\mathbb{Z},3))$

où $H_n(K(\mathbb{Z},3)) = \bigoplus_{(p)} \mathbb{Z}/p^{n_i(n)}\mathbb{Z}$ le plus grand n qui apparaît
(p premier.)

(Réponse : il n'y a que des $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ dans la torsion de $H_n(K(\mathbb{Z},3))$).

Pour un $\mathbb{Z}$-module de type fini écrit sous forme canonique $\mathbb{Z}^r \oplus F$ où F est la torsion, on a :

$$\boxed{(\mathbb{Z}^r \oplus F) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = \mathbb{Q}^r}$$

ce qui permet de calculer facilement le rang r de $\mathbb{Z}^r \oplus F$.

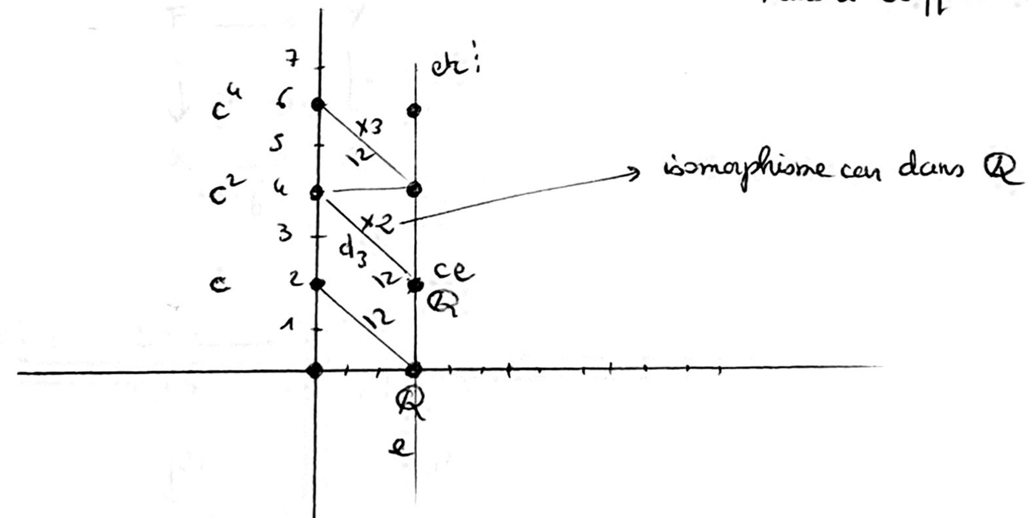
$H_*(X;\mathbb{Q}) = H_*(X) \otimes \mathbb{Q}$ d'après le Théorème des coeff. universels.
(car $\mathbb{Q}$ est plat)

① <u>On utilise la suite spectrale de cohomologie de la fibration</u> :

$$K(\mathbb{Z},2) \longrightarrow * \longrightarrow K(\mathbb{Z},3)$$

(Th) : $E_2^{p,q} = H^p(K(\mathbb{Z},3)\,;\, H^q(K(\mathbb{Z},2))\,;\,\mathbb{Q}) \xRightarrow{cv} \mathbb{Q}_{(0,0)}$
coeff. dans $\mathbb{Q}$ — degré (0,0)

$H^*(K(\mathbb{Z},2);\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}[c]$ (C'est la m̂ suite spect que pour $\pi_4(S^3)$, mais à coeff ds $\mathbb{Q}$)



Ainsi : <u>ccl</u> Rang $H_*(K(\mathbb{Z},3)) = \begin{cases} 0 \text{ si } * \neq 3,0. \\ 1 \text{ si } * = 3 \text{ ou } 0. \end{cases}$

② <u>Torsion de $H_*(K(\mathbb{Z},3))$</u> ?

$\mathbb{Z}_{(p)}$ = sous-anneau de $\mathbb{Q}$ = $\{ \frac{a}{b} \,/\, \Delta(a,b)=1$ et $\Delta(b,p)=1 \}$ est plat

$\bigcup_{p} \mathbb{Z}[\frac{1}{p}] = \mathbb{Q}$ $\qquad$ $\bigcup_{q \neq p} \mathbb{Z}[\frac{1}{q}] = \mathbb{Z}_{(p)}$.

$\mathbb{Z}_{(p)}$ est un anneau local (1 seul idéal maximal $p\mathbb{Z}_{(p)} \subset \mathbb{Z}_{(p)}$)

$\mathbb{Z}_{(p)}$ plat $\Rightarrow$ $\boxed{H_*(X;\mathbb{Z}_{(p)}) \simeq H_*(X) \otimes \mathbb{Z}_{(p)}}$ (cf. Th. CU)

De m̂, le th CU en cohomologie donne :

$$0 \to \mathrm{Ext}(H_{n-1}(X), \mathbb{Z}_{(p)}) \longrightarrow H^n(X;\mathbb{Z}_{(p)}) \longrightarrow \mathrm{Hom}(H_n;\mathbb{Z}_{(p)}) \longrightarrow 0$$

où
- $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_{(p)}) = \mathbb{Z}_{(p)}$
- $\mathrm{Hom}(F, \mathbb{Z}_{(p)}) = 0$
- $\mathrm{Ext}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_{(p)}) = 0$
- $\mathrm{Ext}(\mathbb{Z}/q^n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_{(p)}) = 0$ si q premier à p
- $\mathrm{Ext}(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_{(p)}) = \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$

Ainsi $\boxed{H^*(X;\mathbb{Z}_{(p)}) = H^*(X) \otimes \mathbb{Z}_{(p)}}$ $\leftarrow$ (cf autre th. des CU que celui donné en cours)

Fibre d'une application :

(1) $\begin{array}{c} F \\ \downarrow \\ X \xrightarrow{f} Y \end{array}$

$f : X \to Y$ donné.

Pb : Construire F de sorte que (1) se comporte comme une fibration (suite ex. longue d'homotopie + suites spectr. d'homologie associées)

chemin constant en $f(x)$

$$\begin{array}{ccc} (x, \overline{f(x)}) & E & \longrightarrow Y^I \\ \uparrow & \downarrow \searrow^{g} & \downarrow ev(1) \\ x & X \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

équiv. d'homotopie ~

où $I = [0,1]$ $Y^I = \mathcal{C}([0,1], Y)$

c'est une fibration d'Hurewicz (possède la pro. de relèvement d'homotopie)

$E = X \times_f Y^I = \{(x, \lambda) \in X \times Y^I \;/\; f(x) = \lambda(1)\}$ désigne la fibration pull-back.
$E \to X$ est une fibration, et c'est une équivalence d'homotopie

$g : E \longrightarrow Y$
$(x, \lambda) \mapsto \lambda(0)$

d'où le diag. comm : $F \to E$, $g : E \to Y \ni y_0$, $X \to E$ (équivalence d'homotopie ~), $X \xrightarrow{f} Y$

c'est une vrai fibration de fibre F
on fera l'abus de langage suivant :
F est la fibre de $f : X \to Y$ bien que f ne soit pas une fibration

$g^{-1}(y_0) = F \doteq \{(x, \lambda) \;/\; \lambda(1) = f(x) \text{ et } g(x,\lambda) = \lambda(0) = y_0\}$

Notons $EY = \{\lambda \in Y^I \;/\; \lambda(0) = y_0\}$

$$\begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & EY \\ \downarrow & & \downarrow ev(1) \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

Exemple : $S^2 \hookrightarrow \mathbb{P}^\infty\mathbb{C}$

$$\begin{array}{ccc} \pi_2(S^2) & \longrightarrow & \pi_2(\mathbb{P}^\infty\mathbb{C}) \\ \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\ H_2(S^2) & \xrightarrow{\simeq} & H_2(\mathbb{P}^\infty\mathbb{C}) \end{array}$$

cf Hurewicz (car $H_1(S^2) = 0$)

cf Hurewicz (car $H_1(\mathbb{P}^\infty\mathbb{C}) = 0$)

NB : Si $\pi_i(X) = 0$ si $i<n$ (et $n \geq 2$)
on a $\pi_n(X) = H_n(X)$ d'après Hurewicz, Notons $\pi_i(X) = \pi_i$.

or

Alors $X \longrightarrow K(\pi_n, n) \in [X, K(\pi_n,n)] = H^n(X, \pi_n) = \mathrm{Hom}(\pi_n, \pi_n) \ni id$
(cf 245) (cf coeff. univ 244)

donc on peut parler de $X \xrightarrow{id} K(\pi_n, n)$

Construction de Cartan - Serre (1952) (Méthode du meurtre des groupes d'homotopie) (Killing homotopy groups)

On a la fibration :
(cf. abus de langage !)

$$X\langle n\rangle \longrightarrow X \xrightarrow{\text{"id"}} K(\pi_n, n)$$

$\doteq$ "X rendu n-connexe"
(X est, à priori, (n-1)-connexe)

d'où la suite exacte longue d'homotopie

$$\cdots \to \pi_{i+1}(K) \longrightarrow \pi_i(X\langle n\rangle) \xrightarrow{\simeq} \pi_i(X) \xrightarrow{\simeq} \pi_i(K(\pi_n,n)) \to \cdots$$

($\pi_{i+1}(K) = 0$ si $i>n$, $= 0$ si $i=n$; $\pi_i(X\langle n\rangle) = 0$ ($i=n$) ; $\pi_i(K(\pi_n,n)) = 0$)

Ainsi
$\pi_i(X\langle n\rangle) \simeq \pi_i(X)$ si $i>n$
$\pi_n(X\langle n\rangle) = 0$ si $i=n$
$\pi_i(X\langle n\rangle) = 0$ si $i<n$

Comment calculer $\pi_{n+1}(X)$? Hurewicz donne seulement $\pi_n(X) = H_n(X)$ car $\pi_i(X) = 0$ si $i<n$.
On aura ici :

$$\pi_{n+1}(X) \xleftarrow{\simeq} \pi_{n+1}(X\langle n\rangle) \underset{\text{Hurewicz}}{\simeq} H_{n+1}(X\langle n\rangle)$$

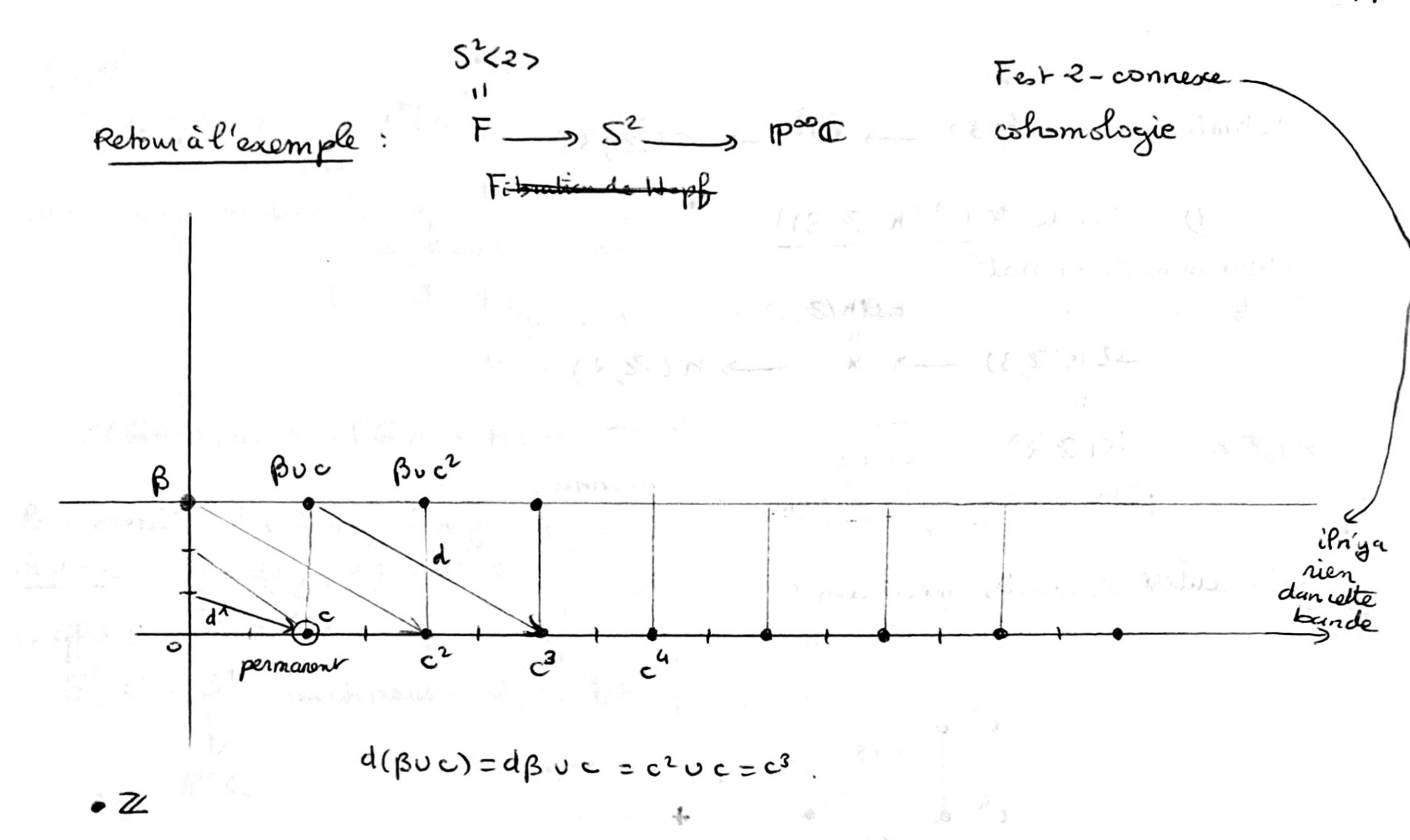
D'où $\boxed{\pi_{n+1}(X) \simeq H_{n+1}(X\langle n\rangle)}$

NB : Si $n=1$, $X\langle 1\rangle = \tilde{X}$ revêtement universel de X. La construction $X\langle n\rangle$ généralise celle des revêtements. Mais attention, $X\langle n\rangle$ n'est plus un revêtement de X.

Retour à l'exemple : $F \longrightarrow S^2 \longrightarrow \mathbb{P}^\infty\mathbb{C}$ avec $F = S^2\langle 2\rangle$

~~Fibration de Hopf~~

F est 2-connexe, cohomologie



$$d(\beta\cup c) = d\beta \cup c = c^2\cup c = c^3 .$$

• $\mathbb{Z}$

$H_3(F) = \mathbb{Z} = \pi_3(S^2)$

La suite spectrale donne donc $\boxed{H_i(F) = H_i(S^3)}\ \forall i$.

Th. de Whitehead : Si entre 2 espaces de m̂ type d'homotopie que des CW-complexes il existe une application qui induit un isomorphisme en homologie, et si les espaces sont simplements connexes, alors cette application est 1 équivalence d'homotopie.

Th : La fibre d'1 application entre espaces de type d'hom. de CW-complexes est aussi du type d'homotopie d'un CW-complexe.
(Milnor : la classe des espaces de type d'homotopie d'un CW-complexe est fermée pour les bonnes constructions.)

On n'a pas besoin de tous ces résultats car $F \to S^2 \to \mathbb{P}^\infty\mathbb{C}$ permet d'obtenir F : on reconnait la fibration de HOPF :

$$\begin{array}{ccccc} S^1 & \longrightarrow & S^3 & \longrightarrow & S^\infty = \{\text{vecteurs unitaires de } \mathbb{C}^\infty \text{ ie réunion de tous les vect. unitaires de } \mathbb{C}^n\} \\ & & \downarrow H & & \downarrow H \quad \text{Fibration de Hopf} \\ & & S^2 & \longrightarrow & \mathbb{P}^\infty\mathbb{C} \\ & & \| & & \\ & & \mathbb{P}^1\mathbb{C} & & \end{array}$$

Homotopiquement, on a $\boxed{S^3 = S^2\langle 2\rangle}$

Fibration : $S^3\langle 3\rangle \longrightarrow S^3 \longrightarrow K(\mathbb{Z},3)$

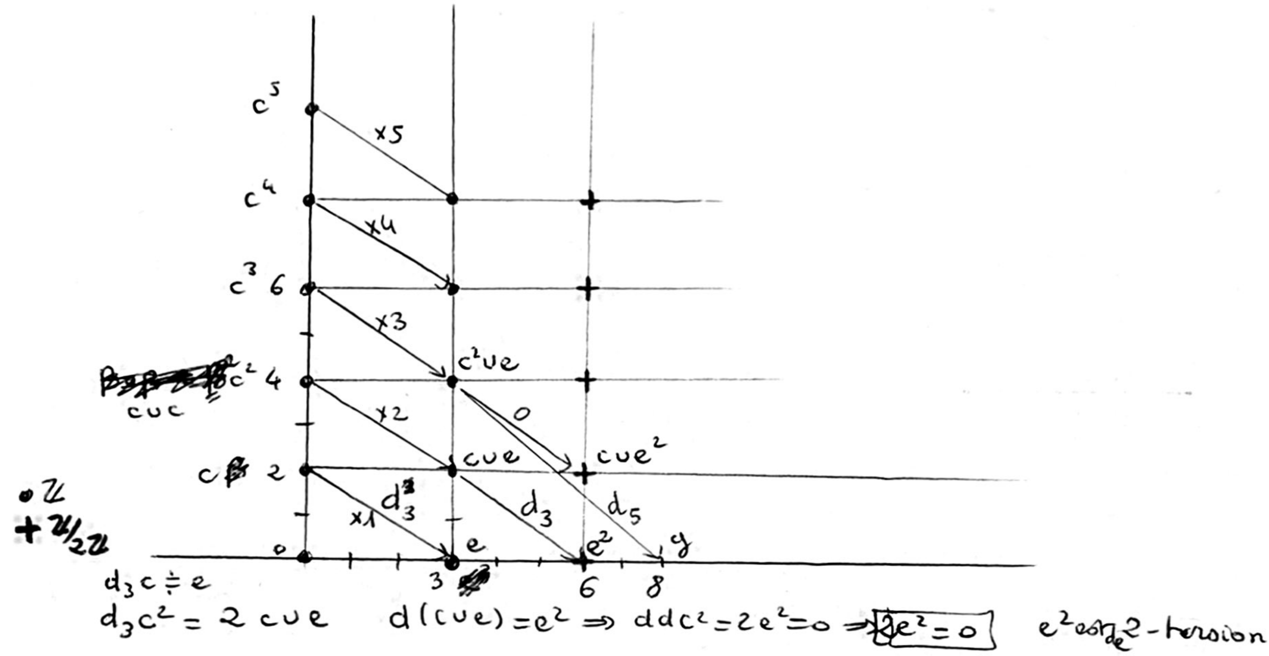
1) Calcul de $H^*(K(\mathbb{Z},3))$

Analysons la fibration

$$\begin{array}{ccccc} & & E K(\mathbb{Z},3) & & \\ & & \| & & \\ \Omega K(\mathbb{Z},3) & \longrightarrow & * & \longrightarrow & K(\mathbb{Z},3) \\ \| & & & & \\ K(\mathbb{Z},2) & & & & \end{array}$$

fibre connue — espace total connu — inconnu

On utilise les suites spectrales :



$d_3 c \doteq e$

$d_3 c^2 = 2\,cue$ $d(cue) = e^2 \Rightarrow ddc^2 = 2e^2 = 0 \Rightarrow \boxed{2e^2 = 0}$ e^2 est de 2-torsion

Fibration dont l'espace total est contractible, donc tout doit disparaître

Ainsi $H^*(K(\mathbb{Z},3),\mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} \text{ si } * = 3 \\ 0 \text{ si } * < 3 \text{ ou } * = 4,5 \\ \boxed{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \text{ si } * = 6} \\ \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \text{ si } * = 8 \end{cases}$

$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ + (torsion < p) pour $* = 2p+2$.

exercices :

a) Connaissant $H^6(K(\mathbb{Z},3);\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, calculer $H^5(S^3\langle 3\rangle;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et en déduire $H_4(S^3\langle 3\rangle;\mathbb{Z})$ $\boxed{= \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \pi_4(S^3)}$

b) $H(\ ;\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ à coefficient dans : La p-torsion de $\pi_i(S^3)$ est nulle pour $i < 2p$ et non nulle pour $i = 2p$ (en fait $\pi_{2p}(S^3) = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \oplus$ (torsion < p)

17/3/83

Rappel :

$K(\mathbb{Z},2) = \mathbb{P}^\infty\mathbb{C}$ $\quad H^*(K(\mathbb{Z},2);\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[c]$

Si G groupe abélien de type fini, G s'écrit :

$$G = \underbrace{\mathbb{Z}^r}_{\text{partie libre}} \oplus \underbrace{\bigoplus_{\substack{p\in P \\ r\in I_p}} \mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}}_{\text{Torsion}}$$

(r = rang du groupe a.t.f.)
(p décrivant 1 sous-ensemble fini de P)

$K(G\oplus H, n) = K(G,n) \times K(H,n)$ $\quad$ (car $\pi_n(G\oplus H) = \pi_n(G)\times\pi_n(H)$)

Pour connaître $K(G,n)$, il suffit de connaître $K(\mathbb{Z},n)$ et $K(\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}, n)$.

Si $p=2$, $K(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, 1) = \mathbb{P}^\infty\mathbb{R} \doteq \bigcup_{n\geq 0} \mathbb{P}^n\mathbb{R}$

En effet :

$S^0 \hookrightarrow S^n$ revêtement à 2 feuillets = fibration de fibre S^0
$\quad\downarrow$
$\mathbb{P}^n\mathbb{R}$

donc $\pi_i(\mathbb{P}^n) = \pi_i(S^n)$ si $i\geq 2$
$\pi_1(\mathbb{P}^n) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (si $n>1$)

Remarque : Si $\tilde{H}^*(X;\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = 0$, alors $H^*(X;\mathbb{Z})$ n'a pas de p-torsion d'après le théorème des coefficients universels en cohomologie (idem en hom.)

$$H^*(K(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z},1);\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[w] & \text{si } p=2 \\ & \text{si } p\neq 2 \text{ et } 0 \\ & \text{si } p=0 \quad (\text{i.e. } \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \mathbb{Z}) \end{cases}$$

$S^0 \longrightarrow S^\infty \sim *$
$\quad\downarrow$
$\mathbb{P}^\infty\mathbb{R}$

$\mathbb{P}^1$

$S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}$
$\quad\downarrow$
$\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$

• Fibré trivial

$\mathbb{P}_n\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{n+1} \supset \{(d,x) / x\in d\} = E$ (éventuellement $\|x\|\leq 1$) (d = droite $\in \mathbb{P}_n\mathbb{R}$)

$\downarrow pr_1$ $\quad \pi$

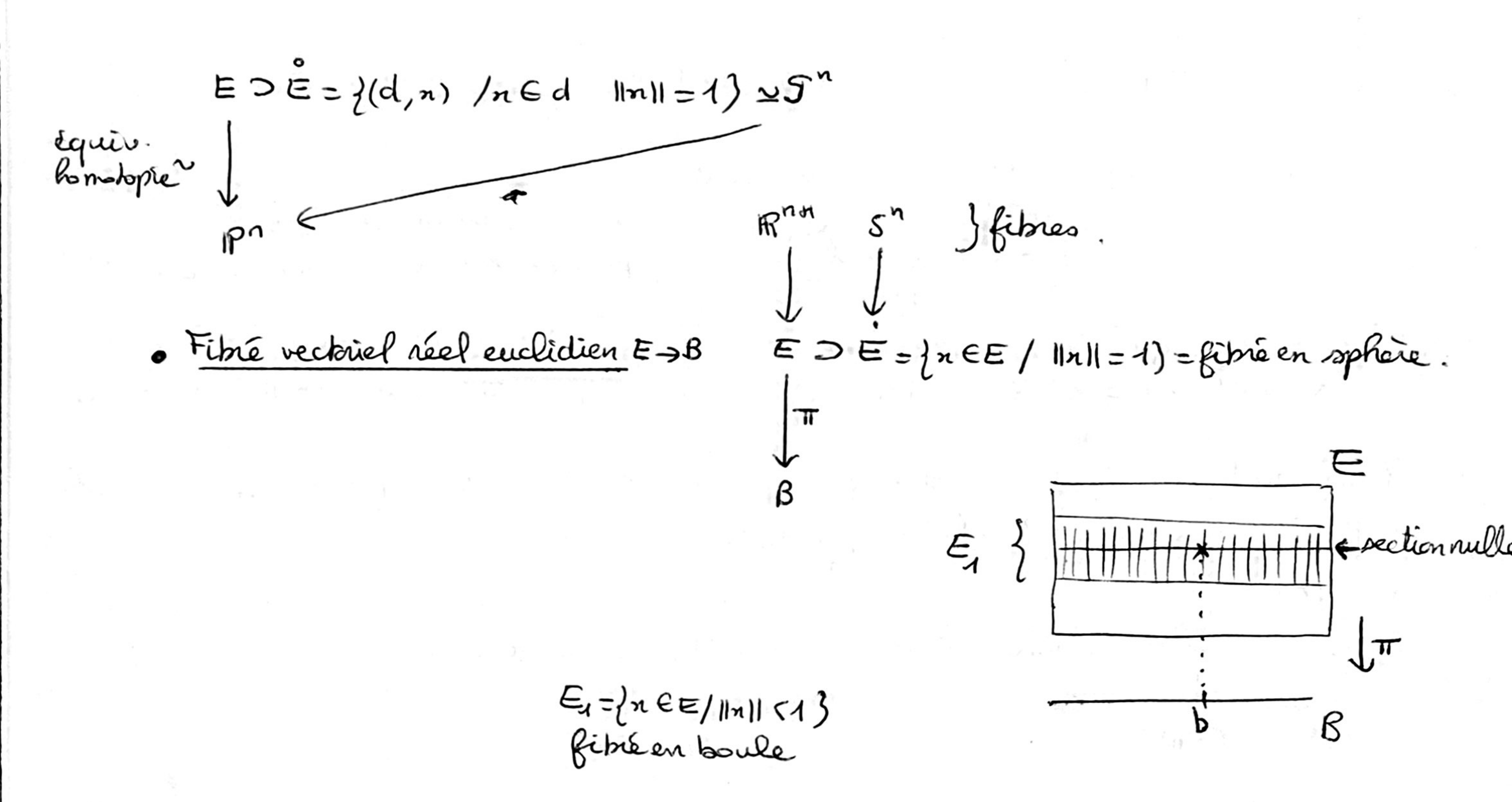
$\mathbb{P}_n\mathbb{R}$

$\pi^{-1}(d) = d \subset \mathbb{R}^{n+1}$

$\pi : E \to \mathbb{P}_n\mathbb{R}$ est le fibré tautologique de fibre $\mathbb{R}$

Si $n=1$, E = ruban de Moëbius "infini".

après 1 tour :



• Fibré vectoriel réel euclidien $E \to B$ $E \supset \dot{E} = \{x \in E \ / \ \|x\| = 1\}$ = fibré en sphère.

$E \xrightarrow{\pi} B$

$E_1 = \{x \in E / \|x\| < 1\}$
fibré en boule

Isomorphisme de Thom :

$(\mathbb{R}^{n+1}, S^n) \longrightarrow (E, \mathring{E})$, c'est un fibré relatif = ~~fibré~~ paire fibré.

$\downarrow$
B

(!) l'isomorphisme de Thom est isomorphisme d'algèbre (Suite Spect.)

« Si le fibré est orientable, $H^p(B ; H^q(\mathbb{R}^{n+1}, S^n ; G)) \Rightarrow H^{p+q}(E, \mathring{E} ; G)$, et

Or $H^q(\mathbb{R}^{n+1}, S^n ; G) = \begin{cases} G \text{ si } q = n+1 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$ par excision (ou bien suite de coh. longue de la paire)

[Figure: plan (p, q), axe q, axe p, origine 0, ligne (D) à hauteur n+1 avec des points]

La suite spectrale est concentrée en (D), donc elle est triviale (d=0), donc :

$$H^{p}(B ; G) \simeq H^{p+n+1}(E, \mathring{E} ; G) \quad \text{(Thom)}$$

d'après le th. co. de suite spectrale.

$H^{p+n+1}(E, \mathring{E}; G)$ = cohomologie d'1 fibré en boule modulo le fibré en sphère

NB : $E/\dot{E} = T(\xi)$ où $\xi : E \xrightarrow{p} B$ et par excision $H^{p+n+1}(E, \dot{E} ; G) \simeq H^{p+n+1}(T(\xi) ; G)$

Prenons $G = \mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ à 1 générateur 1. Pour $p=0$, si Φ désigne l'isomorphisme de Thom,

$$1 \in H^0(B; \underbrace{H^{n+1}(\mathbb{R}^{n+1}, S^n)}_{= G^{\pi_0(B)}}) \xrightarrow{\Phi} H^{n+1}(E, \mathring{E})$$

fct constante $1 \in G^{\pi_0(B)}$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow i_b^*$$

$$H^0(\{b\}; H^{n+1}(\mathbb{R}^{n+1}, S^n)) \overset{\Phi}{\dashrightarrow} H^{n+1}(\mathbb{R}^{n+1}, S^n) = G$$

Pour tout $b \in B$, i_b est l'inclusion can. $i_b : (F_b, \mathring{F}_b) \hookrightarrow (E, \mathring{E})$, avec $F_b \simeq \mathbb{R}^{n+1}$, $\mathring{F}_b \simeq S^n$; $\{b\} \hookrightarrow B$.

Orienter le fibré, c'est se donner une classe $u \in H^{n+1}(E, \dot{E})$ telle que $\forall b \in B$ $i_b^* u$ engendre G

(Si $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$)

Proposition :

$$\Phi^0 : \underbrace{H^0(B; G)}_{} = H^0(B; \overbrace{H^{n+1}(\mathbb{R}^{n+1}, S^n)}^{G}) \xrightarrow{\simeq} H^{n+1}(E, \mathring{E})$$

$$1 \overset{def}{\longmapsto} u$$

$$H^p(B; G) \ni x = x \cup 1 \qquad \text{suite spectrale}$$

$$\Phi^p : H^p(B; H^{n+1}(\mathbb{R}^{n+1}, S^n)) \underset{\Phi^p}{\xrightarrow{\sim}} H^{p+n+1}(E, \mathring{E})$$

$$\simeq \downarrow p^* \qquad\qquad \uparrow \cup \text{ cupproduit}$$

$$y \quad H^p(E) \otimes H^{n+1}(E, \mathring{E})$$

$$y \mapsto y \otimes u \qquad H^p(E) \otimes H^{n+1}(E, \mathring{E})$$

$$\Phi^p(x) = p^*(x) \cup u$$

ENONCE : "l'isomorphisme de Thom est le cupproduit par la classe fondamentale." ie $\Phi^p(x) = p^*(x) \cup u$ (on montre que Φ est $H^*(B)$-linéaire)

preuve :

$$(F, \mathring{F}) \longrightarrow (E, \dot{E})$$

$$\downarrow$$

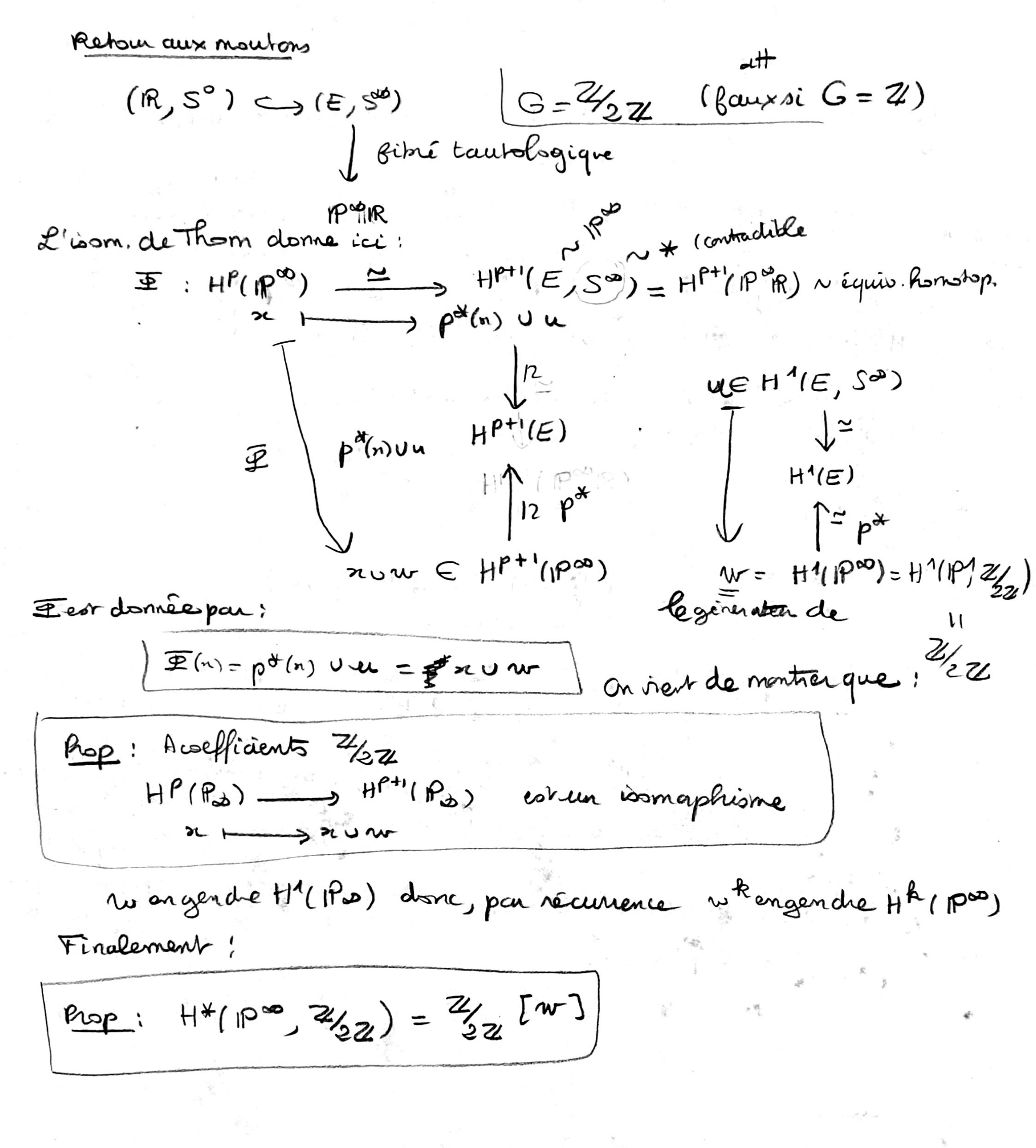
$$B$$

$$E_2^{p,q} = \underbrace{H^p(B; H^q(F, \dot{F}))}_{H^*(B)\text{-module}} \Rightarrow \underbrace{H^{p+q}(E, \dot{E})}_{H^*(E)\text{-module}}$$

$y,\ x \cup y$

donc $H^*(E)$-module (grâce à p^*) à partir des cup-produits

$$p^* : H^*(B) \longrightarrow H^*(E)$$



Retour aux moutons

$$(\mathbb{R}, S^0) \hookrightarrow (E, S^\infty)$$

$\boxed{G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}$ (faux si $G = \mathbb{Z}$) att

$\downarrow$ fibré tautologique

$\mathbb{P}^\infty \mathbb{R}$

L'isom. de Thom donne ici :

$$\Phi : H^p(\mathbb{P}^\infty) \xrightarrow{\simeq} H^{p+1}(E, S^\infty) = H^{p+1}(\mathbb{P}^\infty \mathbb{R})$$

$E \sim \mathbb{P}^\infty$, $S^\infty \sim *$ (contractible) $\sim$ équiv. homotop.

$$x \longmapsto p^*(x) \cup u$$

$$p^*(x) \cup u \in H^{p+1}(E, S^\infty) \xrightarrow{\simeq} H^{p+1}(E) \xleftarrow[\simeq]{p^*} H^{p+1}(\mathbb{P}^\infty) \ni x \cup w$$

$$u \in H^1(E, S^\infty) \xrightarrow{\simeq} H^1(E) \xleftarrow[\simeq]{p^*} H^1(\mathbb{P}^\infty) = H^1(\mathbb{P}^1, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

$u \longmapsto w$, w = le générateur de $H^1(\mathbb{P}^\infty)$

Φ est donnée par :

$$\boxed{\Phi(x) = p^*(x) \cup u = x \cup w}$$

On vient de montrer que :

Prop : A coefficients $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

$$H^p(\mathbb{P}_\infty) \longrightarrow H^{p+1}(\mathbb{P}_\infty) \text{ est un isomorphisme}$$
$$x \longmapsto x \cup w$$

w engendre $H^1(\mathbb{P}_\infty)$ donc, par récurrence w^k engendre $H^k(\mathbb{P}^\infty)$

Finalement :

Prop : $\boxed{H^*(\mathbb{P}^\infty, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\,[w]}$

Remarque : Cette dém. est vraie avec $\mathbb{P}^n$, ie

$$H^*(\mathbb{P}^n ; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[w] / \{w^{n+1} = 0\}$$

Continuer : $K(\mathbb{Z}_2, 2)$? On utilise la suite spectrale en coh. de la fibration $K(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, 1) \longrightarrow * \longrightarrow K(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, 2)$

ANNEXE A

au cours de Lemaire sur les "groupes d'homotopie"

Spectral sequences

§0. Motivations homology of differential objects

Spectral sequences stand among the most powerful mathematical concepts invented during the last decades, but in spite (or because!) of that they usually look horrid to the beginner. Part of the difficulty with them lies in the use of tricky indices (usually three!): in these introductory notes, we shall try to postpone the coming in of indices as late as possible.

Spectral sequences deal with the (co)homology of complicated situations. Recall that a (chain) complex is a sequence of abelian groups (or more generally, objects which behave like abelian groups, such as sheaves) and maps

$$\cdots \to C_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \to \cdots$$

which satisfies $\forall n,\ d_n \circ d_{n+1} = 0$. Homology in degree n is $H_n = \operatorname{Ker} d_n / \operatorname{Im} d_n$. Since we want to put indices aside for the moment, we consider such a complex as a graded object $C_\bullet = (C_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ together with a map d of degree (-1) which satisfies $d^2 = d\circ d = 0$. Graded abelian groups and maps behave like ordinary groups — one may define the abelian category of graded ab. groups and maps, therefore we may forget the grading and define a

differential object (M,d) as an object together with an endomorphism d which satisfies $d^2=0$. Again "object" means an object in some abelian category, i.e. a category in which the usual notions for abelian groups, such as kernels, images, quotients, exact sequences, ... can be defined.

Def 0.1 The homology of the differential object (M,d) is $HM = \operatorname{Ker} d / \operatorname{Im} d = (\text{cycles})/(\text{boundaries})$

Def 0.2 A morphism of diff. obj. $(M,d) \xrightarrow{f} (M'',d'')$ is a map $f: M \to M''$ such that $d''f = f\circ d$

One readily checks (i) that differential objects and maps make up a category (ii) that a differential map $f:(M,d)\to(M'',d'')$ induces $Hf: HM \to HM''$ (iii) that homology H is a functor from (differential objects) into (objects)

Def 0.3 A subobject $M' \subset M$ is a differential subobject of (M,d) if $d(M') \subset M'$. Then $(M', d|M')$ is a differential object and the inclusion is a diff. morphism.

Note that d induces then a differential $\bar d$ on the quotient M/M', and we shall say that we have an exact sequence of differential objects

$$0 \to (M', d|M') \to (M,d) \to (M/M', \bar d) \to 0$$

We leave to the connoisseur's delight that differential objects make up an abelian category ...

The fundamental fact about homology is

0.4. The homology exact triangle

Let $0 \to M' \overset{i}{\hookrightarrow} M \overset{p}{\twoheadrightarrow} M/M' \to 0$ be an exact sequence of differential objects (we **omit** differentials for the sake of brevity). Then the following triangle is **exact**:

$$\begin{array}{ccc} HM' & \xrightarrow{H_i} & HM \\ \delta \nwarrow & & \swarrow H_p \\ & H(M/M') & \end{array}$$

where δ is defined as follows: let $m + M' \in \operatorname{Ker} d$; this means $dm \in M'$. Then dm is a cycle in M' whose class in HM' is δm.

The proof is an exercise. The classical situation is that of complexes: then H_i and H_p have degree 0, while δ which is induced by d has degree -1: the exact triangle uncoils as the long exact sequence of homology groups associated with a short exact sequence of complexes.

0.5 Filtered differential objects

A *filtration* is a sequence of subobjects of a given object, which is increasing or decreasing. An increasing filtration of M is usually denoted $(F_n M)_{n \in \mathbb{Z}}$, with

$$\cdots \subset F_{n-1} M \subset F_n M \subset F_{n+1} M \subset \cdots \subset M$$

Decreasing filtrations can be viewed as increasing ones by changing the sign in the indices. Therefore for the moment we shall stick to increasing filtrations.

A *differential filtered object* is a filtered differential object (!), i.e. $d(F_n M) \subset F_n M$ for all n. Morphisms of filtered objects are defined in the obvious fashion.

In practice, one puts a filtration on a differential object to help understanding its homology. Indeed, if $(F_n M)_{n \in \mathbb{Z}}$ is a filtration on a differential object M, we get in particular for each n an exact triangle

$$(*) \qquad \begin{array}{ccc} H(F_{n-1}M) & \longrightarrow & H(F_n M) \\ \nwarrow & & \swarrow \\ & H(F_n M / F_{n-1} M) & \end{array}$$

associated with the exact sequence

$$0 \to F_{n-1} M \hookrightarrow F_n M \to F_n M / F_{n-1} M \to 0$$

> *Definition 0.6.* The *associated graded object* to $(F_n M)_{n \in \mathbb{Z}}$ is $(F_n M / F_{n-1} M)_{n \in \mathbb{Z}} = Gr_\bullet M$

Note that a morphism of filtered objects induces a morphism of the associated graded objects, and that the associated graded to a differential filtered object inherits a differential (of degree zero). We thus may consider the graded thing

$$H(Gr_\bullet M)$$

On the other hand, one may define a *filtration* on the homology HM by:

$$F_n HM = \operatorname{Im}(Hi : H(F_n M) \to HM) = \operatorname{Ker}(Hj : HM \to H(M/F_n M))$$

Note the exactness of ~~the~~ sequence

$$H(F_n M) \xrightarrow{Hi} HM \xrightarrow{Hj} H(M/F_n M)$$

as part of the triangle for

$$0 \to F_n M \hookrightarrow M \xrightarrow{j} M/F_n M \to 0$$

The main objective of spectral sequence Theory is to compare $H(G_\bullet M)$

which is in general easy to compute

with $G_\bullet(HM)$

the associated graded object to the above filtration.

But let us come back to triangle (*), which we may think of as a triangle of graded objects, with $A_\bullet = H(F_\bullet M)$, $E_\bullet = H(G_\bullet M)$

the exact triangle of graded objects

$$\begin{array}{ccc} A_\bullet & \xrightarrow{Hi_\bullet} & A_\bullet \\ {\scriptstyle (-1)}\nwarrow \delta & & \swarrow Hj_\bullet \\ & E_\bullet & \end{array}$$

is a particular instance of what is called an <u>exact couple</u>, which we shall now discuss.

Again we shall forget the grading.

§1. <u>Exact couples</u>

The concept and terminology is due to W Massey.

In spite of the name, an exact couple is a 5-uple $\mathcal{C} = (A, E, i, j, k)$ of objects and maps such that the triangle

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i} & A \\ k \nwarrow & & \swarrow j \\ & E & \end{array}$$

is exact; thus $\operatorname{Ker} i = \operatorname{Im} k$, $\operatorname{Ker} j = \operatorname{Im} i$, $\operatorname{Ker} k = \operatorname{Im} j$

<u>Remark 1.1</u>: $j \circ k$ is a differential on E

Indeed $(j \circ k) \circ (j \circ k) = j \circ (k \circ j) \circ k = 0$

The main trick is the construction of <u>the derived couple</u>:

<u>Definition and Theorem 1.2</u>. Let $\mathcal{C} = (A, E, i, j, k)$ be an exact couple. Set $A' = i(A)$, $E' = H(E, jk)$

Define:

$i' : A' \to A'$ to be $i' = i|A'$

$j' : A' \to E'$ by $j'(a') = \overline{ja} \in E'$ where $ia = a'$

$k' : E' \to A'$ to be induced by k

Then these maps are well-defined and

$$\mathcal{C}' = (A', E', i', j', k')$$

is an exact couple, which is called the derived couple of $\mathcal{C}$.

Before proving 1.2, we observe that one may define a map of exact couples $\mathcal{C} \to \mathcal{C}_1$ to be a couple of maps $\alpha : A \to A_1$, $\beta : E \to E_1$ such that the diagram:

$$\begin{array}{ccccc} A_1 & & \xrightarrow{i_1} & & A_1 \\ & \nwarrow^{\alpha} & & \alpha \nearrow & \\ & A & \xrightarrow{i} & A & \\ & & \nwarrow^{k} \; E \; \swarrow^{j} & & \\ k_1 & & \downarrow \beta & & j_1 \\ & & E_1 & & \end{array}$$

is commutative. There is a category of exact couples and derivation as defined above is a functor from this category into itself.

Proof of 1.2. We only give samples.

- $j' : A' \to E'$ is **well defined**:

  1/ $ja \in \operatorname{Ker} jk$, for $jkj = 0$

  2/ $ia_1 = ia_2 = a' \Rightarrow a_1 - a_2 \in \operatorname{Ker} i = \operatorname{Im} k$

  then $a_1 = a_2 + ke$

  $ja_1 = ja_2 + jke$

  and $\overline{ja_1} = \overline{ja_2} \in H(E, jk)$

- $\operatorname{Ker} j' = \operatorname{Im} i'$

  1/ $j' \circ i'(a') = ja' = j \circ i(a) = 0$, $\forall a' = ia \in A'$

  2/ let $a' \in A'$ such that $j'a' = 0$

  Then $j'a' = \overline{ja} = ja + jk(E)$

  $\overline{ja} = 0 \Leftrightarrow ja \in jk(E)$

  But $ja = jke \Rightarrow a - ke \in \operatorname{Ker} j = \operatorname{Im} i$

  Thus $\exists a_1 \in A$, $a - ke = ia_1$

  and $a' = ia = i(a - ke) = i(ia_1) = i'(ia_1)$. //

*(cf suite des vérifications derrière)

CQFD

The construction of the derived couple can be iterated indefinitely, yielding a sequence of exact couples $\mathcal{C}^{(n)} = (A^{(n)}, E^{(n)}, i^{(n)}, j^{(n)}, k^{(n)})$ with $\mathcal{C}^{(n)\,\prime} = \mathcal{C}^{(n+1)}$, $\mathcal{C}^{(1)} = \mathcal{C}$.

Set $d^{(n)} = j^{(n)} \circ k^{(n)}$. We obtain a sequence of differential objects

$$(E^{(n)}, d^{(n)})_{n \in \mathbb{N}^*}$$

such that $H(E^{(n)}, d^{(n)}) = E^{(n+1)}$

Definition 1.3. A <u>spectral sequence</u> is a sequence of differential object such that each term is the homology of the preceding one.

Thus every exact couple yields by the derivation process a spectral sequence.

Observe that if $(E^{(n)}, d^{(n)})$ is a spectral sequence $E^{(n+1)}$ is a quotient of a subobject of $E^{(n)}$. The iterated "subquotients" are horrid things, but there is a standard way to lift everything back into the starting diff. object $E^{(1)}$.

Define $Z^{(n)} = \operatorname{Ker} d^{(n)}$, $B^{(n)} = \operatorname{Im} d^{(n)}$, so that $E^{(n+1)} = Z^{(n)}/B^{(n)}$

Consider the diagram on next page, where π_i's are canonical surjections (quotient maps):

* Suite des vérifications :

$$A' = i(A) \xrightarrow{i' = i|_{A'}} A' \qquad A' \xrightarrow{j'} E' = H(E, j\circ k) = \frac{\operatorname{Ker} j\circ k}{\operatorname{Im} j\circ k} \xrightarrow{k'} A'$$

Par définition :

$$\begin{cases} i' = i|_{A'} \\ j'(i(a)) = \overline{j(a)} \\ k'(\bar{e}) = k(e) \end{cases}$$

• k' est bien définie :

1) Si $\bar{e} = \bar{f} \in E'$ $\quad e - f = j\circ k(\alpha) \quad \alpha \in E \Rightarrow k(e) - k(f) = k\circ j\circ k(\alpha) = 0$

2) $\operatorname{Im} k' \subset A'$ car si $a = k'(\bar{e}) = k(e) \Rightarrow j(a) = j\circ k(e) = 0$ car $e \in \operatorname{Ker} j\circ k \Rightarrow a \in \operatorname{Ker} j = \operatorname{Im} i = A'$

• $\operatorname{Im} k' = \operatorname{Ker} i'$:

1) $i'\circ k'(\bar{e}) = i'(k(e)) = i\circ k(e) = 0$

2) Si $a' \in A'$ / $i(a') = 0$, notons $a' = i(a)$. On a : $i\circ i(a) = 0$ donc $i(a) \in \operatorname{Ker} i = \operatorname{Im} k \Rightarrow \exists e \in E \quad a' = i(a) = k(e)$ et $e \in \operatorname{Ker} j\circ k$ puisque : $j\circ k(e) = j\circ i(a) = 0$, donc $\operatorname{Ker} i' \subset \operatorname{Im} k'$.

• $\operatorname{Ker} k' = \operatorname{Im} j'$:

1) $k'\circ j'(a') = k'\circ j'(i(a)) \doteq k'(\overline{j(a)}) \doteq k\circ j(a) = 0$

2) Si $k'(\bar{e}) = 0$, $\quad k(e) = 0 \Rightarrow e \in \operatorname{Ker} k = \operatorname{Im} j$

$\exists a \in A \quad e = j(a)$

donc $\bar{e} = \overline{j(a)} \doteq j'(i(a)) \Rightarrow \bar{e} \in \operatorname{Im} j'$

CQFD

? $Z^2 \supset Z^{(1)} \ldots$

$$
\begin{array}{llllll}
 & E^{(1)} & & & & \\
 & \cup & & & & \\
B^{(1)} \subset & Z^{(1)} & \xrightarrow{\pi^{(1)}} E^{(2)} & & & \\
\cap & \cup & \cup & & & \\
B^{2} \subset & Z^{2} & \twoheadrightarrow Z^{(2)} & \xrightarrow{\pi^{(2)}} E^{(3)} & & \\
\cap & \cup & & \cup & & \\
B^{3} \subset & Z^{3} & \longrightarrow & \twoheadrightarrow Z^{(3)} & \xrightarrow{\pi^{(3)}} E^{(4)} & \\
\cap & & & & & \\
\vdots & & - - - & - - - & & \\
 & & & & \xrightarrow{\pi^{(n-1)}} E^{(n)} & \\
\cap & \cup & & & \cup & \\
B^{n} \subset & Z^{n} & \longrightarrow & & \twoheadrightarrow Z^{(n)} & \xrightarrow{\pi^{(n)}} E^{(n+1)} \\
 & \cup & & & & \cup \\
 & \vdots & & & & \vdots
\end{array}
$$

We set: $Z^2 = (\pi^{(1)})^{-1}(Z^{(2)})$

$Z^3 = (\pi^{(1)})^{-1}(\pi^{(2)})^{-1}(Z^{(3)})$

- - -

$Z^n = (\pi^{(1)})^{-1} \ldots (\pi^{(n-1)})^{-1}(Z^{(n)})$

Similarly, we set:

$B^n = (\pi^{(1)})^{-1} \ldots (\pi^{(n-1)})^{-1}(B^{(n)})$

Lemma 1.4. The canonical surjection $\pi : Z^n \twoheadrightarrow Z^{(n)}$ induces an isomorphism $Z^n/B^n = Z^{(n)}/B^{(n)} = E^{(n+1)}$

Proof: contemplate the diagram:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
0 \to & B^n & \hookrightarrow & Z^n & \longrightarrow & Z^n/B^n & \to 0 \\
\pi & \downarrow & & \downarrow \pi & & \downarrow & \\
0 \to & B^{(n)} & \hookrightarrow & Z^{(n)} & \longrightarrow & Z^{(n)}/B^{(n)} & \to 0
\end{array}
$$

//.

This allows a neat description of the term $E^{(n)}$ in the spectral sequence derived from an exact couple $\mathcal{C} = (A, E, i, j, k)$:

(1.5) Proposition: Let $\mathcal{C} = (A, E, i, j, k)$ be an exact couple and $\mathcal{C}^{(n)} = (A^{(n)}, E^{(n)}, i^{(n)}, j^{(n)}, k^{(n)})$ be its $(n-1)$-st derived couple ($\mathcal{C}^{(1)} = \mathcal{C}$). With the notation defined above, one has:

$$Z^n = k^{-1}(\operatorname{Im} i^n) \quad ; \; i^n = \overbrace{i \circ i \circ \ldots \circ i}^{n \text{ times}}$$

$$B^n = j(\operatorname{Ker} i^n)$$

and therefore

$$E^{(n+1)} = k^{-1}(\operatorname{Im} i^n) / j(\operatorname{Ker} i^n)$$

Proof: $n = 1$. $Z^1 = Z^{(1)} = \operatorname{Ker} jk$

$\operatorname{Ker} jk = k^{-1}(\operatorname{Ker} j) = k^{-1}(\operatorname{Im} i)$

$B^1 = B^{(1)} = \operatorname{Im} jk = j(\operatorname{Im} k) = j(\operatorname{Ker} i)$.

For any n, Z^n is the set of representatives of $Z^{(n)}$ in $E = E^{(1)}$, and $d^{(n)}$ is $j \circ (i^{-n+1}) \circ k$

↑ above $d^{(2)}(\bar{z}) = j \circ i^{-1} \circ k(z)$

× But $j \circ i^{-n+1} \circ k(e) = 0 \Rightarrow (\exists a \in A,\ ke = i^{n-1}a$ and $ja = 0)$

but $ja = 0 \Leftrightarrow a = ia'$, therefore

$$e \in Z^n \Leftrightarrow ke = i^n a' \Leftrightarrow e \in k^{-1}(i^n A)$$

Proceed similarly for B^n. //

With this description of the term $E^{(n)}$, we are in position to define some kind of "limit" for the sequence $E^{(n)}$. Observe that, for all $n \geq 1$

$$B^n \subset B^{n+1} \subset Z^{n+1} \subset Z^n \subset E^1 = E$$

Thus we may define :

$$B^\infty = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} B^n$$

$$Z^\infty = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} Z^n$$

and $E^\infty = Z^\infty / B^\infty$. We leave to the reader to prove :

Proposition (1.6) Set
$$\operatorname{Im} i^\infty = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \operatorname{Im} i^n$$
$$\operatorname{Ker} i^\infty = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \operatorname{Ker} i^n$$
Then
$$E^\infty = k^{-1}(\operatorname{Im} i^\infty) / j(\operatorname{Ker} i^\infty) \quad //.$$

We now prove another description of $E^{(n+1)}$ which turns out to be useful in some cases (e.g. Bockstein spectral sequences)

Consider the exact sequence
$$A^{(n+1)} \xrightarrow{j^{(n+1)}} E^{(n+1)} \xrightarrow{k^{(n+1)}} A^{(n+1)}$$
extracted from $\mathcal{E}^{(n+1)}$. By standard algebra, we may write the short exact sequence

(**) $$0 \to A^{(n+1)}/\operatorname{Ker} j^{(n+1)} \xrightarrow{j^{(n+1)}} E^{(n+1)} \xrightarrow{k^{(n+1)}} \operatorname{Im} k^{(n+1)} \to 0$$

Proposition (1.7) One has the natural isomorphisms :
$$\operatorname{Im} k^{(n+1)} = \operatorname{Im} i^n \cap \operatorname{Ker} i \subset A$$
$$A^{(n+1)}/\operatorname{Ker} j^{(n+1)} \xleftarrow{\ \equiv\ } A/\operatorname{Im} i + \operatorname{Ker} i^n$$
where the second isomorphism is induced by i^n

Moreover, the short exact sequence

(***) $$0 \to A/\operatorname{Im} i + \operatorname{Ker} i^n \xrightarrow{\bar{j}} E^{(n+1)} \xrightarrow{\bar{k}} \operatorname{Im} i^n \cap \operatorname{Ker} i \to 0$$

deduced from (**) and the above isomorphisms still holds for $n = \infty$.

Proof : We contemplate the following diagram

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & 0 \searrow \ \swarrow 0 & & & \\
 & & & \operatorname{Ker} j & & & \\
 & 0 \to \operatorname{Ker}\tilde{j} & \swarrow & \downarrow & & & \\
 & & \searrow & A & \xrightarrow{i^n} & A^{(n+1)} = \operatorname{Im} i^n & \\
 & \swarrow j|\operatorname{Ker}\tilde{j} & & \downarrow j \quad \searrow \tilde{j} = \pi j = j^{(n+1)} i^n & & \downarrow j^{(n+1)} & \\
0 \to & B^n & \hookrightarrow & Z^n & \xrightarrow{\pi} & E^{(n+1)} & \to 0
\end{array}$$

which is commutative, and in which the four sequences pictured on the left are exact. Now $B^n = j(\operatorname{Ker} i^n)$, and it clearly follows from the exactness of the sequence pictured in bold that
$$\operatorname{Ker}\tilde{j} = \operatorname{Ker} j + \operatorname{Ker} i^n = \operatorname{Im} i + \operatorname{Ker} i^n$$
we leave the remaining verifications as an exercise for the reader. //

§2. The Bockstein spectral sequence

We apply the above results to obtain a spectral sequence which relates (co)homology with coefficients in $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ with integral (co)-homology.

Let M be a differential free abelian group. We assume that HM is finitely generated, or if M is graded, we only assume that each component $H_n M$ is finitely generated. Let p be a prime number. Multiplication by p imbeds in a short exact sequence of differential groups

$$0 \to M \xrightarrow{\times p} M \longrightarrow M/pM \to 0$$
$$M/pM = M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$$

which gives rise to an exact couple

$$(2.0) \qquad \begin{array}{ccc} HM & \xrightarrow{\;i\;} & HM \\ {\scriptstyle k}\nwarrow & & \swarrow{\scriptstyle j} \\ & H(M\otimes \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) & \end{array}$$

where i is multiplication by p
j is induced by reduction mod. p
and k is the boundary homomorphism, defined as follows. Let
$\xi \in M/pM$ be a cycle, and $z \in \xi$, $z \in M$ be a representative in M. One has $dz \in pM$, and $k\xi$ is the class of the cycle $\frac{1}{p} dz$.

If M is graded, with a differential of degree $+1$ (resp -1), i and j have degree 0 and k has degree $(+1)$(resp -1).

Definition 2.1 The Bockstein spectral sequence is the spectral sequence associated to the exact couple (2.0).

The first differential $\beta^{(1)}: H(M\otimes \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \to H(M\otimes \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ is called the Bockstein; if M is the cochain complex of a space, the Bockstein is the simplest cohomology operation: for $p = 2$, it can be identified with the first Steenrod square Sq^1.

We now use the description (***) of the term $E^{(n+1)}$ (p 12). We first recall our assumption that HM is finitely generated: by the standard structure theorem, we may write

$$HM = \mathbb{Z}^{r} \oplus T_{(\neq p)} \oplus T_{(p)}$$

where $\mathbb{Z}^r$ is the torsion-free summand, $T_{(\neq p)}$ is the sum of primary components of order prime to p, and $T_{(p)}$ denotes the p-primary torsion summand: $T_{(p)}$ is a direct sum of cyclic groups whose orders are powers of p. Write $T_{(p)} = \bigoplus_i \mathbb{Z}/p^{s_i}\mathbb{Z}$

Recall that i is multiplication by p. By (***) p. 12, we have the exact sequence

$$(2.2) \qquad 0 \to HM/(pHM + \mathrm{Ker}(\times p^n)) \xrightarrow{j} E^{(n+1)} \xrightarrow{k} p^n HM \cap \mathrm{Ker}(\times p) \to$$

Observe that multiplication by p is isomorphic on $T_{(\neq p)}$, and that

$$\mathrm{Ker}(\times p^n) = \left\{ \begin{array}{c} \bigoplus_{s_i \leq n} \mathbb{Z}/p^{s_i}\mathbb{Z} \\ \oplus \\ \bigoplus_{s_i > n} p^{s_i - n}\mathbb{Z}/p^{s_i}\mathbb{Z} \end{array} \right\} \subset T_{(p)}$$

From this we clearly see that

$$HM/(pHM + \mathrm{Ker}(\times p^n))$$

is isomorphic to a direct sum of $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$'s, namely

$$(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^r \oplus \left(\bigoplus_{s_i > n} \mathbb{Z}/p^{s_i}\mathbb{Z} \Big/ p\mathbb{Z}/p^{s_i}\mathbb{Z} \right)$$

and so is

$$p^n HM \cap \mathrm{Ker}(\times p) = \bigoplus_{s_i > n} p^{s_i - 1}\mathbb{Z}/p^{s_i}\mathbb{Z}$$

Moreover, there is the same number of $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$'s in $p^n HM \cap \mathrm{Ker}(\times p)$ as in the right-hand-side summand of $HM/(pHM + \mathrm{Ker}(\times p^n))$, and the extension (2.2) is trivial, because $E^{(n+1)}$ is a subquotient of $E^{(1)} = H(M \otimes \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ which is a vector space over $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$: therefore $E^{(n+1)}$ is a vector space over $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ and (2.2) is an extension of vector spaces, which is always trivial.

We summarize:

Prop 2.2 In the Bockstein spectral sequence, for each $n \geq 0$, $E^{(n+1)}$ is a direct sum of cyclic groups of order p, one for each infinite cyclic summand in HM, and two for each cyclic summand of order p^s with $s > n$.

Moreover, $\beta^{(n+1)}$ maps isomorphically one of the two $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ summands corresponding to each $\mathbb{Z}/p^{n+1}\mathbb{Z}$-summand in HM onto the other.

Moreover, if e_p denotes the exponents of the group $T_{(p)}$, i.e e_p is the smallest integer that $p^{e_p} \cdot T_{(p)} = 0$, we have

$$\forall n \geq e_p, \quad E^{(n+1)} = E^{(n+2)} = \cdots = E^{\infty}$$

and

$$E^{\infty} \cong (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^r = (HM/\mathrm{Torsion}) \otimes$$

As an example, we consider the cohomology of the real projective plane. It is well-known that

$$H^i(\mathbb{RP}(2); \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \quad i = 0, 1,$$
$$= 0 \quad i > 2$$

and

$$H^i(\mathbb{RP}(2); \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \quad i = 0$$
$$= \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \quad i = 2$$
$$= 0 \quad i \neq 0, 2$$

Therefore, $\beta^{(1)} : H^1(\mathbb{RP}(2); \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to H^2(\mathbb{RP}(2); \ldots$ must be an isomorphism. Indeed $\beta^{(1)} = Sq^1$, $H^*(\mathbb{RP}(2); \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[x]$, $x \in H^1$, and $Sq^1 x = x^2$.

Exercice 2.3: Describe the Bockstein spectral seq for $\mathbb{RP}(n)$, $p = 2$.

Exercice 2.4: From the following description of $H^*(G_2(\mathbb{R}^4); \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$:

n	0	1	2	3	4
basis of $H^n(G_2(\mathbb{R}^4); \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$	1	w_1	w_1^2 w_2	$w_1 w_2$	$w_2^2 = w_1^2 w_2$

and the Wu formula $Sq^1 w_i = w_1 w_i$, $i=1,2$, describe the Bockstein spectral sequence mod. 2 for $G_2(\mathbb{R}^4)$.

§3. Spectral sequence of a filtered differential module

Let M be a differential module, endowed with an increasing filtration $(F_p M)_{p\in\mathbb{Z}}$. We assume for simplicity that the filtration is finite: more precisely:

$$0 = F_{-1}M \subset F_0 M \subset F_1 M \subset \dots \subset F_N M = M$$

We thus have a graded exact couple

$$\forall p \qquad \begin{array}{ccc} H(F_{p-1}M) & \longrightarrow & H(F_pM) \\ & \nwarrow \quad \swarrow & \\ & H(F_pM/F_{p-1}M) & \end{array}$$

which we write
$$A_* = H(F_* M)$$
$$E^1_* M = H(F_* M / F_{*-1} M)$$

$$(3.0) \qquad \begin{array}{ccc} A_* & \xrightarrow[(+1)]{i} & A_* \\ {\scriptstyle k}\nwarrow{\scriptstyle (-1)} & & {\scriptstyle (0)}\swarrow{\scriptstyle j} \\ & E^1_* M & \end{array}$$

The numbers between brackets indicate the degree of the map. The spectral sequence associated to this exact couple is denoted $E^r_* M$: it is a spectral sequence of graded modules.

Note that by the Noether isomorphism lemma, there are exact sequences of differential modules ($F_p = F_pM$ for short)

$$\forall r \geq 1 \qquad 0 \to F_p/F_{p-1} \to F_{p+r}/F_{p-1} \to F_{p+r}/F_p \to 0$$
$$0 \to F_{p-1}/F_{p-r-1} \to F_p/F_{p-r-1} \to F_p/F_{p-1} \to 0$$

and therefore boundary maps

$$\partial'_r : H(F_{p+r}/F_p) \to H(F_p/F_{p-1}) = E^1_p$$
$$\partial''_r : E^1_p = H(F_p/F_{p-1}) \to H(F_{p-1}/F_{p-r-1})$$

(3.1) Proposition: For each $r \geq 1$, one has

$$E^{r+1}_p M = \operatorname{Ker} \partial''_r / \operatorname{Im} \partial'_r$$

Proof: We look at the following diagram

$$\begin{array}{ccccc} & & & H(F_{p-r-1}) \xrightarrow{i^r} H(F_{p-1}) & \\ & & & \nearrow k \qquad\qquad \searrow j' & \\ H(F_{p+r}/F_p) & \xrightarrow{\partial'_r} & H(F_p/F_{p-1}) & \xrightarrow{\partial''_r} & H(F_{p-1}/F_{p-r-1}) \\ & {\scriptstyle k'}\searrow & \nearrow {\scriptstyle j} & & \\ & & H(F_p) & & \\ & & \searrow {\scriptstyle i^r} & & \\ & & H(F_{p+r}) & & \end{array}$$

in which arrows on a same line make an exact sequence, and triangles commute. Clearly

$$\operatorname{Im} \partial'_r = j(\operatorname{Im} k') = j(\operatorname{Ker} i^r)$$
$$\operatorname{Ker} \partial''_r = k^{-1}(\operatorname{Ker} j') = k^{-1}(\operatorname{Im} i^r)$$

and the result follows from (1.5) //

Observe that if $p+r \geq N$ and $p-r \leq 0$, i.e $r \geq \max(p, N-p)$, one has

$$E_p^{r+1} = E_p^{r+2} = E_p^{\infty} = \operatorname{Ker} k / \operatorname{Im} \partial'$$

with

$$k : H(F_p/F_{p-1}) \to H(F_{p-1})$$
$$\partial' : H(M/F_p) \to H(F_p/F_{p-1})$$

are boundary maps.

On the other hand, there is a natural filtration on HM defined as follows:

$$F_p HM = \operatorname{Im}(HF_pM \to HM)$$
$$= \operatorname{Ker}(HM \to H(M/F_pM))$$

in other word, a class has filtration p if it contains a cycle of filtration p. Note that the two descriptions of $F_p HM$ coincide by exactness of the triangle associated to $0 \to F_p \to M \to M/F_p \to 0$.

We claim that the following crucial fact is true:

Proposition (3.2)

$$Gr_p HM = F_p HM / F_{p-1} HM = E_p^{\infty}$$

Proof: We have the commutative diagram with exact lines

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & HM & & \\ & & & & \downarrow \gamma_{p-1} & \searrow \gamma_p & \\ H(M/F_p) & \xrightarrow{\partial'} & H(F_p/F_{p-1}) & \xrightarrow{\varepsilon'} & H(M/F_{p-1}) & \to & H(M/F_p) \\ & & & \searrow k & \downarrow & & \\ & & & & H(F_{p-1}) & & \end{array}$$

By the second description of $F_p HM$, we have

$$Gr_p HM = \operatorname{Ker} \gamma_p / \operatorname{Ker} \gamma_{p-1}$$

and by exactness and the above remark

$$E_p^{\infty} = \operatorname{Ker} k / \operatorname{Im} \partial' = \operatorname{Ker} k / \operatorname{Ker} \varepsilon$$

The result now follows from the following "butterfly lemma". //

Lemma 3.3 In the following diagram of modules, with exact lines:

$$\begin{array}{ccccc} A & & & & A' \\ & \searrow u & & \swarrow u' & \\ w \downarrow & & B & & \downarrow w' \\ & \swarrow v' & & \searrow v & \\ C' & & & & C \end{array}$$

one has

$$\operatorname{Ker} w / \operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker} w' / \operatorname{Ker} u'$$

$$(\text{and } \operatorname{Im} v' / \operatorname{Im} w = \operatorname{Im} v / \operatorname{Im} w')$$

Proof: check that $u'^{-1} \circ u$ induces a well defined map from $\operatorname{Ker} w / \operatorname{Ker} u$ to $\operatorname{Ker} w' / \operatorname{Ker} u'$, whose inverse is induced by $u^{-1} \circ u'$. //

Conclusion: It follows from (1.5), (1.6) that the E^r terms appear as "successive approximations" of E^{∞}. Now the key proposition 3.2. states that E^{∞} is isomorphic to the associated graded to the filtration of HM induced by the filtration of M, if this filtration is finite. One then says that the spectral sequence __converges__ to HM, and write

$$E^r \Rightarrow HM$$

§4. Bigradings.

Most spectral sequences arising in nature are spectral sequences of bigraded modules – the most notable exception being the Bockstein spectral sequence. These arise from a filtered differential graded module $(F_p M_*)_{p\in\mathbb{Z}}$:

Let us first assume that the filtration is increasing and $d: M_* \to M_*$ has degree -1 : thus M_* is a chain complex and $(F_p M_*)_{p\in\mathbb{Z}}$ is an increasing sequence of subcomplexes of M_*.

The exact couple (3.0) becomes a bigraded couple, but there are two bigrading conventions in literature : we adopt J.P. Selle's convention, which seems to be the most widely used one. Set:

$$A^1_{p,q} = H_{p+q}(F_p M_*)$$

$$E^1_{p,q} = H_{p+q}(F_p M_* / F_{p-1} M_*)$$

p is the filtering degree

q is the complementary degree

$p+q$ is the total degree, i.e the degree in M_*

The bidegrees of the maps i, j, k are indicated on the following diagram

(4.1)
$$A^1_{*,*} \xrightarrow[(+1,-1)]{i} A^1_{*,*}, \qquad A^1_{*,*} \xrightarrow[(0,0)]{j} E^1_{**}, \qquad E^1_{**} \xrightarrow[(-1,0)]{k} A^1_{*,*}$$

In the $(r-1)$-st derived couple, we have the following bidegrees

$$A^r_{**} \xrightarrow[(+1,-1)]{i^{(r)}} A^r_{**}, \qquad A^r_{**} \xrightarrow[(-r+1,r-1)]{j^{(r)}} E^r_{**}, \qquad E^r_{**} \xrightarrow[(-1,0)]{} A^r_{**}$$

Note that the bidegree of $j^{(r)}$ is $(-r+1, r-1)$ because $j^{(r)} = j \circ (i^{-1})^{r-1}$. Hence the bidegree of $d^r = j^{(r)} \circ k^{(r)}$ is $(-r, r-1)$

A bigraded spectral sequence is displayed as follows : the point of coordinates (p,q) in the plane represents $E^1_{p,q}$ and its subquotients $E^r_{p,q}$: we picture some differentials

$$d^r_{p,q} : E^r_{p,q} \longrightarrow E^r_{p-r,\, q+r-1}$$

q p $d^3_{2,3}$ $d^4_{6,2}$ $d^2_{3,1}$ $E^2_{3,1}$ $d^1_{5,1}$

This picture corresponds to the case of homology. Cohomology refers to cochain complexes, i.e.

graded differential modules with a differential of degree +1. In most cases, one then has a decreasing filtration on such a cochain complex. It is then customary to use upper indices

$$d : M^n \to M^{n+1}$$

$$F^p M^* \supset F^{p+1} M^*$$

and to write

$$E_1^{p,q} = H^{p+q}(F^p M^* / F^{p+1} M^*)$$

$$A_1^{p,q} = H^{p+q}(F^p M^*)$$

The bidegree of the r-th differential

$$d_r : E_r^{p,q} \longrightarrow E_r^{p+r,\, q-r+1}$$

is then $(r, 1-r)$, and the arrows in the picture (4.1) go "right and down" instead of "left and up".

A straightforward adaptation of (3.1), (3.2) shows that a bigraded spectral sequence converges if the filtration is finite in each degree, or even homologically finite in each degree. To wit, we have:

Theorem (4.2): Let $(F_p M_*)_{p \in \mathbb{Z}}$ be a filtered chain complex (by an increasing filtration). Assume

$$H_n(F_p M_*) = 0 \quad \text{if } p < 0$$

$$H_n(F_p M_*) = H_n(M_*) \quad \text{if } p \geq n$$

then, $\forall r \geq 1$, $E^r_{p,q} = 0$ if $p < 0$ or $q < 0$, and:

$\forall r > \max(p, q+1)$, $E^r_{p,q} = E^\infty_{p,q} = Gr_p H_{p+q}(M_*)$

Proof: we only check the condition on r. The hypothesis on the filtration implies by exactness that $E^1_{p,q} = 0$ if $p < 0$ or $q < 0$. Thus the non-zero terms in the spectral sequence lie in the first quadrant ($p \geq 0$ and $q \geq 0$). Now, if $r > p$, the range of $d^r_{p,q}$ lies in the half plane $p < 0$ and is therefore 0. If $r > q+1$, the domain of $d^r_{p+r,\, q-r+1}$ (whose range is $E^r_{p,q}$) sits in the half-plane $q < 0$ and is therefore 0. Thus $E^r_{p,q}$ = st if $r > \max(p, q+1)$. //

Note that the associated graded $Gr_* H_n M$ is displayed as the E^∞ terms sitting on the line $p + q = n$. In particular $E^\infty_{0,n} = F_0 H_n M$ is a submodule of $H_n M$ and $E^\infty_{n,0} = H_n M / F_{n-1} H_n M$ is a quotient of $H_n M$. Here we keep assuming the hypotheses of (4.2) of course.

We conclude these introductory notes with a brief account of two important spectral sequences in algebraic topology.

§5. The spectral sequence of a fibration

Let X be a connected CW-complex, and

$$F \longrightarrow E \xrightarrow{\pi} X$$

be a Hurewicz fibration with base space X and fibre F.

The CW-complex X is filtered by its skeletons $X^{(p)}$. We may assume that $X^{(0)}$ is the base-point x_0. The total space E is filtered by $E^{(p)} = \pi^{-1}(X^{(p)})$. Let $H_*(- ; G)$ be singular homology with coefficients in G. We have an exact couple

$$\begin{array}{ccc} H_*(E^{(p-1)}; G) & \longrightarrow & H_*(E^{(p)}; G) \\ \nwarrow & & \swarrow \\ & E^1_{p,*} = H_{p+*}(E^{(p)}, E^{(p-1)}; G) & \end{array}$$

which is the exact sequence of the pair $(E^{(p)}, E^{(p-1)})$. This exact couple yields a spectral sequence, which is called the homology spectral sequence of the fibration.

Using the fact that

$$\forall p \geq 0 \qquad X^{(p+1)} = X^{(p)} \cup \{(p+1)\text{-cells}\}$$

it is not hard to see that the hypotheses of Thm 4.2 hold: thus

$$E^1_{p,q} = H_{p+q}(E^{(p)}, E^{(p-1)}; G) = 0 \text{ if } p<0 \text{ or } q<0$$

Moreover, since the restriction of π to any open cells of X is a trivial fibration, one has

$$H_{p+q}(E^{(p)}, E^{(p-1)}; G) \cong H_p(X^{(p)}, X^{(p-1)}) \otimes H_q(F; G)$$

If X is simply-connected, one may show – this is the deepest part of the theorem – that the above isomorphism is compatible with the boundaries of the triples $E^{(p)}, E^{(p-1)}, E^{(p-2)}$ and $X^{(p)}, X^{(p-1)}, X^{(p-2)}$.

Therefore, we have:

Theorem (5.1) If $\pi_1(X) = 0$, the homology spectral sequence of the fibration $F \to E \to X$ satisfies

$$E^2_{p,q} = H_p(X; H_q(F; G))$$
$$E^\infty_{p,q} = Gr_p\, H_{p+q}(E; G)$$

If $\pi_1(X) \neq 0$, there still is a similar description of the E^2 term, but one must use homology with local coefficients.

There is a similar result for cohomology

Theorem 5.2. If $\pi_1(X) = 0$, there is a cohomology spectral sequence

$$E_2^{p,q} = H^p(X; H^q(F; G))$$
$$E_\infty^{p,q} = Gr^p\, H^{p+q}(E; G)$$

Moreover, E_2^{**} has a bigraded algebra structure induced by the cup-product in E_2, assuming G is a ring:

$$H^p(X; H^q(F;G)) \otimes H^{p'}(X; H^{q'}(X;G)) \xrightarrow{\cup} H^{p+p'}(X, H^{q+q'}(F;G))$$

and the differentials d_2 are derivations, i.e.

$$d_2(x \cup y) = (d_2 x) \cup y + (-1)^{\deg x} x \cup d_2 y$$

where $\deg x$ denotes the total degree of $x \in E_2$

Examples : We list up without proof a few classical examples

5.3 The Hopf fibration $S^1 \to S^3 \to S^2$

homology spect. seq.

5.4 The loop space fibration $\Omega S^{n+1} \to PS^{n+1} \to S^{n+1}$

Thus $H_i(\Omega S^{n+1};\mathbb{Z}) = 0$ if $i \not\equiv 0 \mod n$
$= \mathbb{Z}$ if $i \equiv 0 \mod n$

In the two examples above, the cohomology spectral sequence is pictured by reversing the arrows.

5.5. $\mathbb{CP}(\infty)$; cohomology spectral sequence of the Hopf fibration $S^1 \to S^\infty \to \mathbb{CP}(\infty)$

each dot represents $\mathbb{Z}$ - generators are indicated. By the derivation property, if $d_2 y = x$, one must have $d_2(x \cup y) = x^2, \dots, d_2(x^{n-1} \cup y) = x^n$

From this one deduces the algebra isomorphism

$$H^*(\mathbb{CP}(\infty);\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[x]$$

x is usually denoted c_1, the first universal Chern class.

5.6 Calculation of $\pi_4(S^3)$

Recall $[X, K(\pi,n)] = H^n(X;\pi)$

choose a map $\gamma : S^3 \to K(\mathbb{Z},3)$ which represents a generator of $H^3(S^3,\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$. Take its homotopy fibre $S^3\langle 3\rangle$. By the long exact sequence of homotopy groups, one has

$$\pi_i(S^3\langle 3\rangle) = \pi_i(S^3) \qquad i \geq 4$$
$$\pi_i(S^3\langle 3\rangle) = 0 \qquad i \leq 3$$

Thus by the Hurewicz theorem,

$$\pi_4(S^3) = \pi_4(S^3\langle 3\rangle) = H_4(S^3\langle 3\rangle)$$

The Barratt-Puppe fibration sequence reads:

$\Omega K(\mathbb{Z},3) \to S^3\langle 3\rangle \to S^3 \to K(\mathbb{Z},3)$
$\quad \overset{\shortparallel}{K}(\mathbb{Z},2)$

We write the cohomology spectral sequence for

$$K(\mathbb{Z},2) \to S^3\langle 3\rangle \to S^3$$

we get:

$d_2^{0,2}$ must be isomorphic because no higher differentials can be non zero, therefore $E_3 = E_\infty$ and $H^i_{\mathbb{Z}}(S^3\langle 3\rangle) = 0$ for $i = 2$ and 3 by the Hurewicz theorem. Now d_2 is a derivation, therefore

$$d_2(x^2) = 2\cdot(d_2 x) \cup x$$
$$d_2(x^n) = n\cdot(d_2 x) \cup x^{n-1}$$

We get

$$E_3^{3,2} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \quad E_3^{3,4} = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, \ \ldots$$

$$E_3^{3,2n} = \mathbb{Z}/(n+1)\mathbb{Z}, \ldots \text{ and } E_3^{p,q} = 0 \text{ if } p \neq 3$$

Since $E_3 = E_\infty$, the associated graded has only one non-zero term in each degree. Therefore

$$H^{2n+1}(S^3\langle 3\rangle; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \quad n \geq 1$$
$$H^{2n}(S^3\langle 3\rangle; \mathbb{Z}) = 0 \quad n \geq 1$$
$$H^1(S^3\langle 3\rangle; \mathbb{Z}) = 0$$

Now by the universal coefficient theorem, we get $H_4(S^3\langle 3\rangle; \mathbb{Z}) = \pi_4(S^3) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. //

§6. The Atiyah - Hirzebruch spectral sequence

We consider a generalized cohomology theory k^*, defined on finite cw-complexes. Recall that by definition, k^* satisfies the Eilenberg - Steenrod axioms, except the dimension axiom. Recall that the coefficients of the theory k are the groups

$$k^q(*) = \tilde{k}^q(S^0)$$

Let X be a finite cw-complex, filtered by its skeletons $X^{(p)}$. By the exactness axiom, we have an exact couple with

$$A_1^{p,q} = k^{p+q}(X^{(p)})$$
$$E_1^{p,q} = k^{p+q}(X^{(p)}, X^{(p-1)})$$

Since the filtration is finite, the spectral sequence converges and $E_\infty = E_r$ for $r > \dim X$ is an associated graded to $k^*(X)$.

Now

$$E_1^{p,q} = k^{p+q}(X^{(p)}, X^{(p-1)}) = \tilde{k}^{p+q}(X^{(p)}/X^{(p-1)})$$
$$= \bigoplus_{p\text{-cells}} \tilde{k}^{p+q}(S^p)$$
$$(\text{by suspension axiom}) \quad = \bigoplus_{p\text{-cells}} \tilde{k}^q(S^0)$$

Note at this point that if $k^* = H^*(-;G)$, ordinary cohomology with coefficients in G, one has

$$E_1^{p,q} = 0 \quad \text{if } q \neq 0$$

$$E_1^{p,0} = H^p(X^{(p)}, X^{(p-1)}; G)$$

Thus the spectral sequence is concentrated on the line $q = 0$

Therefore the differential d_r must be zero if $r > 1$, and $E_2^{p,0} = E_\infty^{p,0} = H^p(X;G)$. We obtain a (sophisticated) proof that the (cochain) complex $(H^p(X^{(p)}, X^{p-1}, G))_{p \in \mathbb{N}}$ with differential **defined by the coboundary of the triple $(X^{(p)}, X^{(p-1)}, X^{(p-2)})$ has $H^*(X;G)$ as cohomology**: **this complex** is nothing but the cw-cochain complex of X.

In the general case, one proves that

$$E_2^{p,q} = H^p(X; \tilde{k}^q(S^0)) \Rightarrow k^{p+q}(X)$$

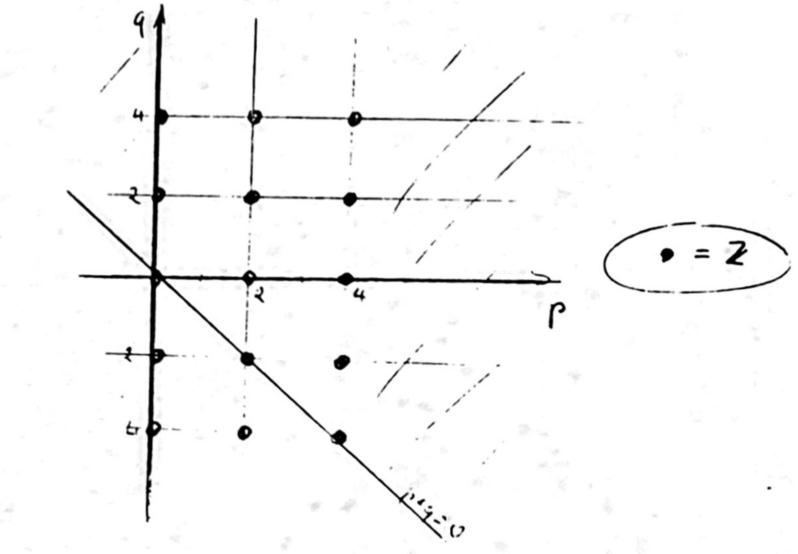
at least when $\pi_1(X) = 0$, otherwise one needs local coefficients. This is the spectral sequence of Atiyah and Hirzebruch, who first proved it for K-theory.

As an application, we compute $K(\mathbb{C}P(2))$ (complex K-theory)

Recall that $H^p(\mathbb{C}P(2); \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ if $p = 0, 2, 4$
$= 0$ otherwise

and that $\tilde{K}^q(S^0) = \mathbb{Z}$ q even
$= 0$ q odd

The picture for $E_2^{p,q} = H^p(\mathbb{C}P(2), \tilde{K}^q(S^0))$ is



the spectral sequence is concentrated between the two vertical lines $p=0$, $p=4$. Since d_r has total degree $+1$, and $E_2^{p,q} = 0$ if p or q is odd, one has $d_r = 0$ for all r. Thus $E_2 = E_\infty$. One reads that $K^0(\mathbb{C}P(2))$ has $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ as its associated graded, on the line $p+q=0$. Since this group is free abelian, there is no extension problem and

$$K^0(\mathbb{C}P(2)) = \mathbb{Z}^3.$$

//

Annexes au cours sur les "groupes d'homotopie"

Suites exactes de R-modules (réf. Hu, Intr. to homological algebra)

Définition : Une suite exacte $\dots \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to \dots$ de R-modules est scindée en B si $B \simeq \mathrm{Im} f \oplus \mathrm{Im} g$, ce qui équivaut à dire que $\mathrm{Im} f$ est un facteur direct de B (ie il existe $B' \subset B$ / $B = \mathrm{Im} f \oplus B'$) — le montrer facilement.

Proposition : Soit $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ une suite exacte de R-modules. Les 3 assertions sont $\sim$:

(1) La suite est scindée ie $B \simeq A \oplus C$
(2) $\exists u : B \to A$ inverse à gauche de f, ie $u \circ f = id_A$
(3) $\exists v : C \to B$ " droite de g, ie $g \circ v = id_C$.

preuve :

Si $B \simeq \mathrm{Im} f \oplus \mathrm{Im} g$, on aura ici $B = A' \oplus C'$ où $\begin{cases} A \xrightarrow[\sim]{f} A' = \mathrm{Im} f \\ C' \xrightarrow[\sim]{g} C = \mathrm{Im} g \end{cases}$

$\forall b = x + y \in B = A' \oplus C'$ posons $u(b) = a$ tel que $x = f(a)$
Alors $u \circ f(a) = a$ par construction.
$\forall c \in C$ posons $v(c) = c' \in C'$ / $g(c') = c$. On aura $g \circ v(c) = g(c') = c$, ce qui prouve que (1) $\Rightarrow$ (2) et (1) $\Rightarrow$ (3).

(2) $\Rightarrow$ (1) : On a $B = \mathrm{Im} f \oplus \mathrm{Ker}\, u$ et $\mathrm{Ker}\, u \xrightarrow[\sim]{g} C$.
En effet, si $b \in B$, on écrit $b = f(u(b)) + (b - f(u(b)))$ et si $x \in \mathrm{Im} f \cap \mathrm{Ker}\, u$, $x = f(a)$ et $u(x) = 0 \Rightarrow u(f(a)) = 0 \Leftrightarrow a = 0 \Rightarrow x = 0$ donc $\mathrm{Im} f \cap \mathrm{Ker}\, u = \{0\}$.
Donc $B = \mathrm{Im} f \oplus \mathrm{Ker}\, u$.
Enfin $\mathrm{Im} f = \mathrm{Ker}\, g$ donc $B = \mathrm{Ker}\, g \oplus \mathrm{Ker}\, u$ et $g : \mathrm{Ker}\, u \to C$ est injective, et surjective d'1 façon triviale.

(3) $\Rightarrow$ (1) On a $B = \mathrm{Im} f \oplus \mathrm{Im}\, v$ et $\mathrm{Im}\, v \xrightarrow[\sim]{g} C$.
En effet, si $b \in B$ s'écrivait $b = f(a) + v(c)$, on aurait $g(b) = c$. Prenons donc $c = g(b)$: $b - v \circ g(b) \in \mathrm{Im} f = \mathrm{Ker}\, g$ car $g(b) - g \circ v \circ g(b) = 0$, donc il existe un unique $a \in A$ / $f(a) = b - v \circ g(b)$ (cf. f injective).
Aussi $b = f(a) + v \circ g(b)$.
L'unicité vient aussi d'être démontrée ! De toute façon, si $x \in \mathrm{Im} f \cap \mathrm{Im}\, v$, on a : $x = f(a) = v(c) \Rightarrow 0 = g \circ v(c) = c \Rightarrow x = 0$.
Enfin $\mathrm{Im}\, v \xrightarrow[\sim]{g} C$ est trivial.
CQFD

NB : Si A, B et C sont des e. vectoriels, la suite $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ est toujours scindée ! En effet, $\mathrm{Im} f = \mathrm{Ker}\, g$ possède un supplémentaire dans B, disons $B = \mathrm{Im} f \oplus C'$ et on montre facilement que $C' \xrightarrow[\sim]{g} C$ est un isomorphisme.

NB: Si C est un R-module libre, la suite $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ est toujours scindée car on construit facilement l'inverse à droite $v : C \to B$ de g en donnant ses valeurs sur une base de C.

Toujours sur le Hu :

Th. 3.6 p21 : Si $g \circ f$ est un isomorphisme de R-modules, où $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$, où f et g sont 2 morph. de R-modules,
alors 1) f est injective
2) g est surjective
3) $Y = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} g$

Co 5.8 p34 ~~u tdo~~ et 5.9 p34 :

(a) La suite exacte $\dots \to X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \to \dots$ de R-modules est scindée en Y s'il existe un R-morphisme $h : Y \to X$ tel que $h \circ f$ soit un automorphisme de X. Dans ce cas $Y \simeq \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Im} g \simeq X \oplus \operatorname{Im} g$

(b) La suite exacte $\dots \to X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \to \dots$ de R-modules est scindée en Y s'il existe un R-morphisme $k : Z \to Y$ tel que $g \circ k$ soit un automorphisme de Z. Alors $Y \simeq \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Im} g \simeq \operatorname{Im} f \oplus Z$

Bibliographie

Spanier : Algebraic Topology

Greenberg : Lectures on algebraic topology (Hom. et Cohom.)

Massey : tomes 1 et 2 a) Algebraic topology : an introduction
b) Hom. et Cohomologie (graduate texts, Springer)

Whitehead : Elements of homotopy theory (le cours de Lemaire)